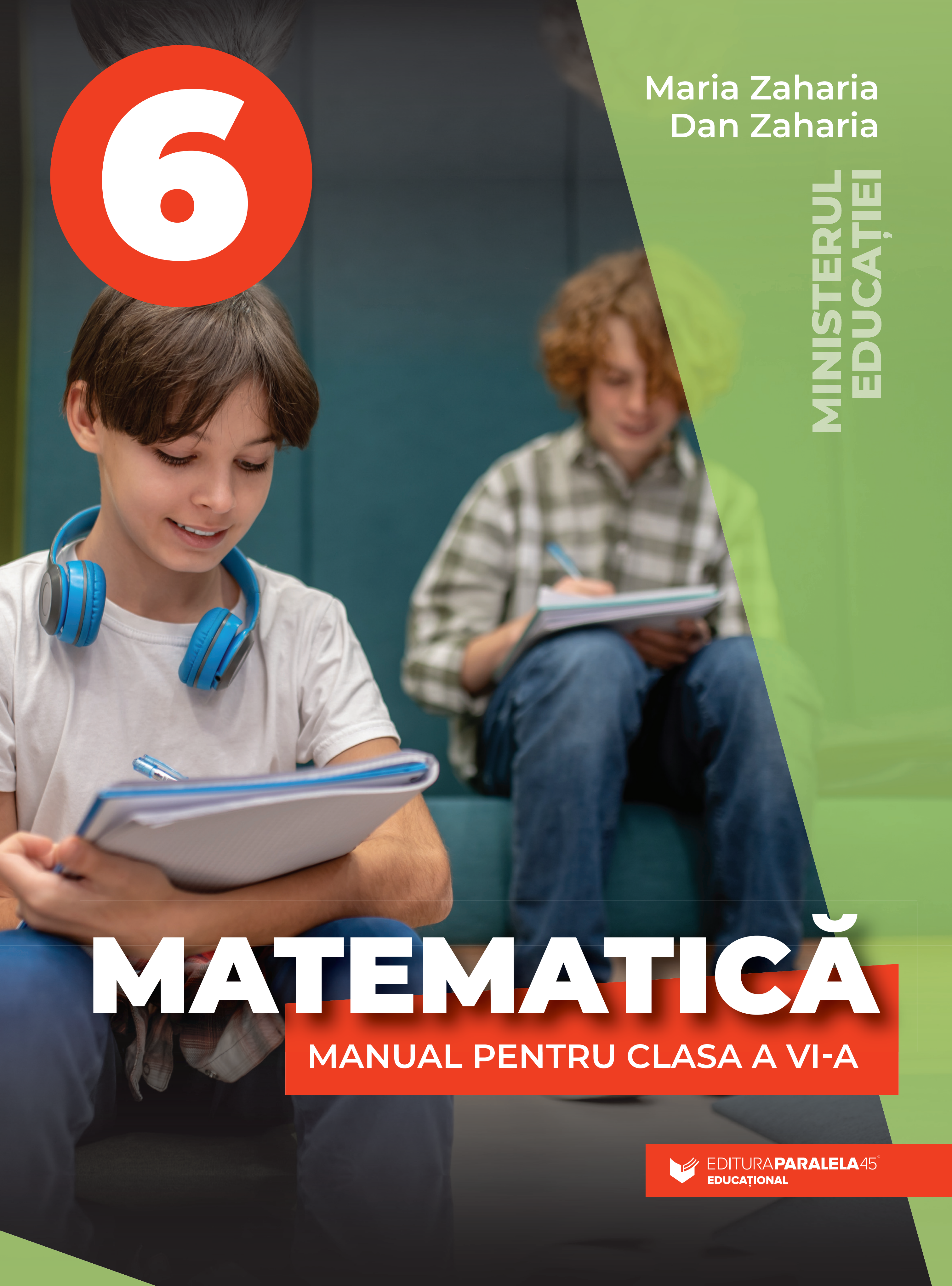
Maria Zaharia
Dan Zaharia

MINISTERUL EDUCAȚIEI

6



MATEMATICĂ

MANUAL PENTRU CLASA A VI-A

EDITURA PARALELA 45
EDUCAȚIONAL

Acest manual școlar este proprietatea Ministerului Educației.

Manualul este realizat în conformitate cu Programa școlară aprobată prin
Ordinul ministrului educației naționale nr. 3393/28.02.2017.

119 – număr de telefon unic la nivel național pentru cazurile de abuz împotriva copiilor

116.111 – numărul de telefon de asistență pentru copii

6

Maria Zaharia
Dan Zaharia

MINISTERUL EDUCAȚIEI

MATEMATICĂ

MANUAL PENTRU CLASA A VI-A

Editura Paralela 45

Editura Paralela 45

Manualul a fost aprobat prin Ordinul Ministrului Educației nr. 5268/04.08.2023.
Manualul este distribuit elevilor în mod gratuit, atât în format tipărit, cât și în format digital.

ACEST MANUAL A FOST FOLOSIT DE:						
Anul	Numele elevului care a primit manualul	Clasa	Școala	Anul școlar	Starea manualului*	
					la primire	la returnare
1.						
2.						
3.						
4.						

* Starea manualului se va înscrie folosind termenii: *nou*, *bun*, *îngrijit*, *nesatisfăcător*, *deteriorat*.
Cadrele didactice vor controla dacă numele elevului este scris corect.
Elevii nu trebuie să facă niciun fel de însemnări pe manual.

Referenți științifici:
Lect. univ. dr. Alexandru Negrescu, Universitatea Politehnica din București
Prof. gr. I Ion Tudor, Școala Gimnazială Băbana, jud. Argeș

ISBN 978-973-47-3951-6

Coordonator editorial: Iuliana Ene
Redactare: Iuliana Ene
Corectură: Andreea-Sorina Roșca
Tehnoredactare: Carmen Rădulescu
Design copertă: Mirona Pintilie
Pregătire de tipar: Marius Badea

Credite foto: shutterstock.com, dreamstime.com, wikipedia.org, bnr.ro, romaniancoins.org
Materiale video şi audio, digitalizare:
EDITSOFT & SERVICES

COMENZI – CARTEA PRIN POȘTĂ
EDITURA PARALELA 45
Bulevardul Republicii, nr. 148, Clădirea C1, etaj 4, Pitești,
jud. Argeș, cod 110177
Tel.: 0248 633 130; 0753 040 444; 0721 247 918
Tel./fax: 0248 214 533; 0248 631 439; 0248 631 492
E-mail: comenzi@edituraparalela45.ro

www.edituraparalela45.ro

CUPRINS

Instrucțiuni de utilizare a manualului în format digital și tipărit

Varianta digitală a manualului cuprinde integral conținutul variantei tipărite și, în plus, o serie de activități multimedia interactive, care vor face învățarea mult mai plăcută și mai ușoară.

Simbolurile care indică activitățile multimedia interactive de învățare:

AMII static

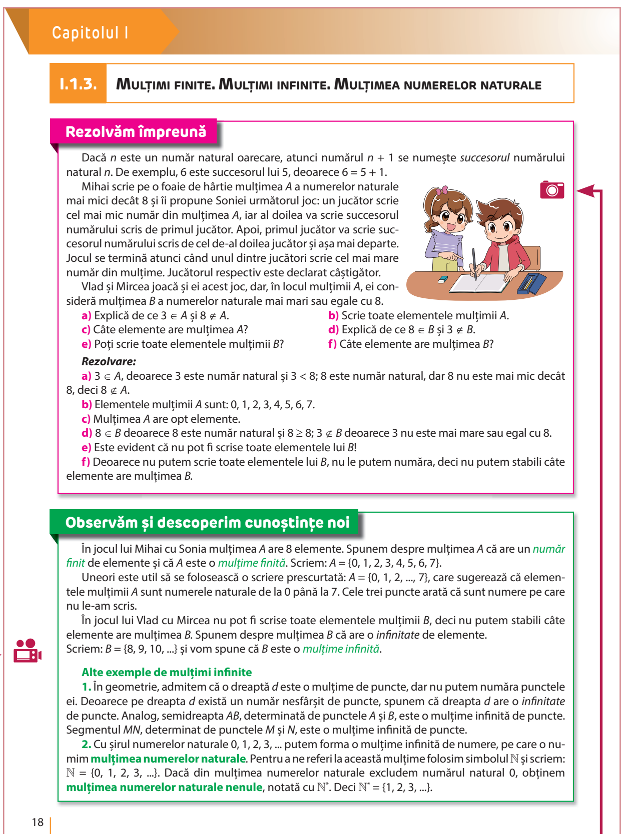
Activarea acestui buton permite vizualizarea optimizată a secvenței din manual.

AMII animat

Activarea acestui buton permite vizualizarea unui filmuleț, pentru care se pot controla începerea/întreruperea (prin butonul Start/Pauză), volumul și maximizarea ecranului.

AMII interactiv

Activarea acestui buton permite vizualizarea unor secvențe educaționale cu grad înalt de interactivitate, la finalul cărora este dat un feedback imediat. Exercițiile marcate cu acest simbol pot fi de tipul: completare, trage și plasează, bifarea variantei corecte, asocierea unor termeni din mai multe coloane.



Capitolul I

I.1.3. MULȚIMI FINITE. MULȚIMI INFINITE. MULȚIMEA NUMERELOR NATURALE

Rezolvăm împreună

Dacă n este un număr natural oarecare, atunci numărul $n + 1$ se numește *succesorul* numărului natural n. De exemplu, 6 este succesorul lui 5, deoarece $6 = 5 + 1$.

Mihai scrie pe o foaie de hârtie mulțimea A a numerelor naturale mai mici decât 8 și îi propune Soniei următorul joc: un jucător scrie cel mai mic număr din mulțimea A, iar al doilea va scrie succesorul numărului scris de primul jucător. Apoi, primul jucător va scrie succesorul numărului scris de cel de-al doilea jucător și așa mai departe. Jocul se termină atunci când unul dintre jucători scrie cel mai mare număr din mulțime. Jucătorul respectiv este declarat câștigător.

Vlad și Mircea joacă și ei acest joc, dar, în locul mulțimii A, ei consideră mulțimea B a numerelor naturale mai mari sau egale cu 8.

a) Explică de ce $3 \in A$ și $8 \notin A$.
b) Scrie toate elementele mulțimii A.
c) Câte elemente are mulțimea A?
d) Explică de ce $8 \in B$ și $3 \notin B$.
e) Poți scrie toate elementele mulțimii B?
f) Câte elemente are mulțimea B?

Rezolvare:

a) $3 \in A$, deoarece 3 este număr natural și $3 < 8$; 8 este număr natural, dar 8 nu este mai mic decât 8, deci $8 \notin A$.
b) Elementele mulțimii A sunt: 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7.
c) Mulțimea A are opt elemente.
d) $8 \in B$ deoarece 8 este număr natural și $8 \geq 8$; $3 \notin B$ deoarece 3 nu este mai mare sau egal cu 8.
e) Este evident că nu pot fi scrise toate elementele lui B!
f) Deoarece nu putem scrie toate elementele lui B, nu le putem număra, deci nu putem stabili câte elemente are mulțimea B.

Observăm și descoperim cunoștințe noi

În jocul lui Mihai cu Sonia mulțimea A are 8 elemente. Spunem despre mulțimea A că are un *număr finit* de elemente și că A este o *mulțime finită*. Scriem: $A = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$.

Uneori este util să se folosească o scriere prescurtată: $A = \{0, 1, 2, ..., 7\}$, care sugerează că elementele mulțimii A sunt numerele naturale de la 0 până la 7. Cele trei puncte arată că sunt numere pe care nu le-am scris.

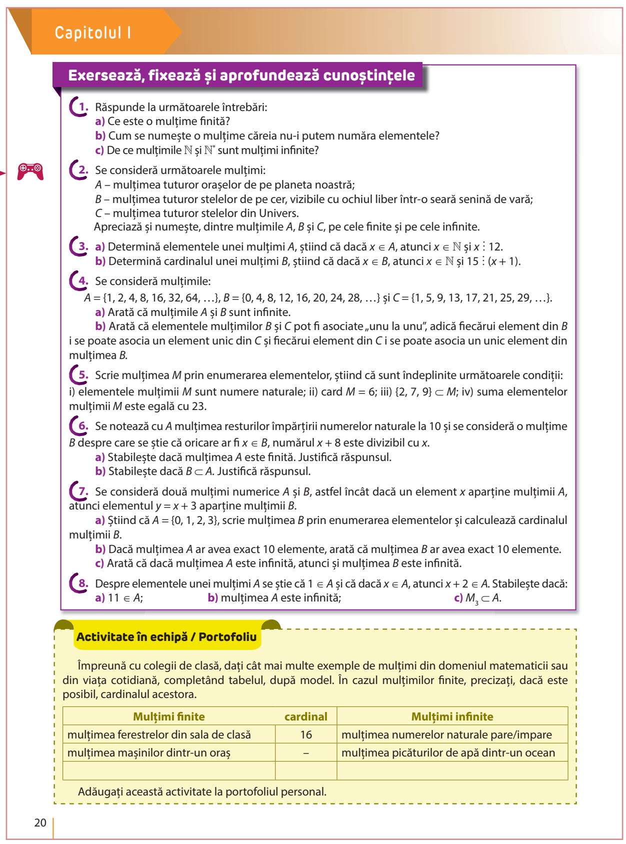
În jocul lui Vlad cu Mircea nu pot fi scrise toate elementele mulțimii B, deci nu putem stabili câte elemente are mulțimea B. Spunem despre mulțimea B că are o *infinitate* de elemente.
Scriem: $B = \{8, 9, 10, ...\}$ și vom spune că B este o *mulțime infinită*.

Alte exemple de mulțimi infinite

1. În geometrie, admitem că o dreaptă d este o mulțime de puncte, dar nu putem număra punctele ei. Deoarece pe dreapta d există un număr nesfârșit de puncte, spunem că dreapta d are o *infinitate* de puncte. Analog, semidreapta AB, determinată de punctele A și B, este o mulțime infinită de puncte. Segmentul MN, determinat de punctele M și N, este o mulțime infinită de puncte.

2. Cu șirul numerelor naturale 0, 1, 2, 3, ... putem forma o mulțime infinită de numere, pe care o numim **mulțimea numerelor naturale**. Pentru a ne referi la această mulțime folosim simbolul $\mathbb{N}$ și scriem: $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, ...\}$. Dacă din mulțimea numerelor naturale excludem numărul natural 0, obținem **mulțimea numerelor naturale nenule**, notată cu $\mathbb{N}^*$. Deci $\mathbb{N}^* = \{1, 2, 3, ...\}$.

18



Capitolul I

Exersează, fixează și aprofundează cunoștințele

1. Răspunde la următoarele întrebări:
a) Ce este o mulțime finită?
b) Cum se numește o mulțime căreia nu-i putem număra elementele?
c) De ce mulțimile $\mathbb{N}$ și $\mathbb{N}^*$ sunt mulțimi infinite?

2. Se consideră următoarele mulțimi:
A – mulțimea tuturor orașelor de pe planeta noastră;
B – mulțimea tuturor stelelor de pe cer, vizibile cu ochiul liber într-o seară senină de vară;
C – mulțimea tuturor stelelor din Univers.
Apreciază și numește, dintre mulțimile A, B și C, pe cele finite și pe cele infinite.

3. **a)** Determină elementele unei mulțimi A, știind că dacă $x \in A$, atunci $x \in \mathbb{N}$ și $x \vdots 12$.
b) Determină cardinalul unei mulțimi B, știind că dacă $x \in B$, atunci $x \in \mathbb{N}$ și $15 \vdots (x + 1)$.

4. Se consideră mulțimile:
$A = \{1, 2, 4, 8, 16, 32, 64, \dots\}$, $B = \{0, 4, 8, 12, 16, 20, 24, 28, \dots\}$ și $C = \{1, 5, 9, 13, 17, 21, 25, 29, \dots\}$.
a) Arată că mulțimile A și B sunt infinite.
b) Arată că elementele mulțimilor B și C pot fi asociate „unu la unu", adică fiecărui element din B i se poate asocia un element unic din C și fiecărui element din C i se poate asocia un unic element din mulțimea B.

5. Scrie mulțimea M prin enumerarea elementelor, știind că sunt îndeplinite următoarele condiții: i) elementele mulțimii M sunt numere naturale; ii) card $M = 6$; iii) $\{2, 7, 9\} \subset M$; iv) suma elementelor mulțimii M este egală cu 23.

6. Se notează cu A mulțimea resturilor împărțirii numerelor naturale la 10 și se consideră o mulțime B despre care se știe că oricare ar fi $x \in B$, numărul $x + 8$ este divizibil cu x.
a) Stabilește dacă mulțimea A este finită. Justifică răspunsul.
b) Stabilește dacă $B \subset A$. Justifică răspunsul.

7. Se consideră două mulțimi numerice A și B, astfel încât dacă un element x aparține mulțimii A, atunci elementul $y = x + 3$ aparține mulțimii B.
a) Știind că $A = \{0, 1, 2, 3\}$, scrie mulțimea B prin enumerarea elementelor și calculează cardinalul mulțimii B.
b) Dacă mulțimea A ar avea exact 10 elemente, arată că mulțimea B ar avea exact 10 elemente.
c) Arată că dacă mulțimea A este infinită, atunci și mulțimea B este infinită.

8. Despre elementele unei mulțimi A se știe că $1 \in A$ și că dacă $x \in A$, atunci $x + 2 \in A$. Stabilește dacă:
a) $11 \in A$; **b)** mulțimea A este infinită; **c)** $M_3 \subset A$.

Activitate în echipă / Portofoliu

Împreună cu colegii de clasă, dați cât mai multe exemple de mulțimi din domeniul matematicii sau din viața cotidiană, completând tabelul, după model. În cazul mulțimilor finite, precizați, dacă este posibil, cardinalul acestora.

Mulțimi finite	cardinal	Mulțimi infinite
mulțimea ferestrelor din sala de clasă	16	mulțimea numerelor naturale pare/impare
mulțimea mașinilor dintr-un oraș	–	mulțimea picăturilor de apă dintr-un ocean

Adăugați această activitate la portofoliul personal.

20

pentru activitate animată
(film sau animaţie scurtă)

pentru activitate statică, de observare
a unei imagini semnificative

pentru activitate interactivă

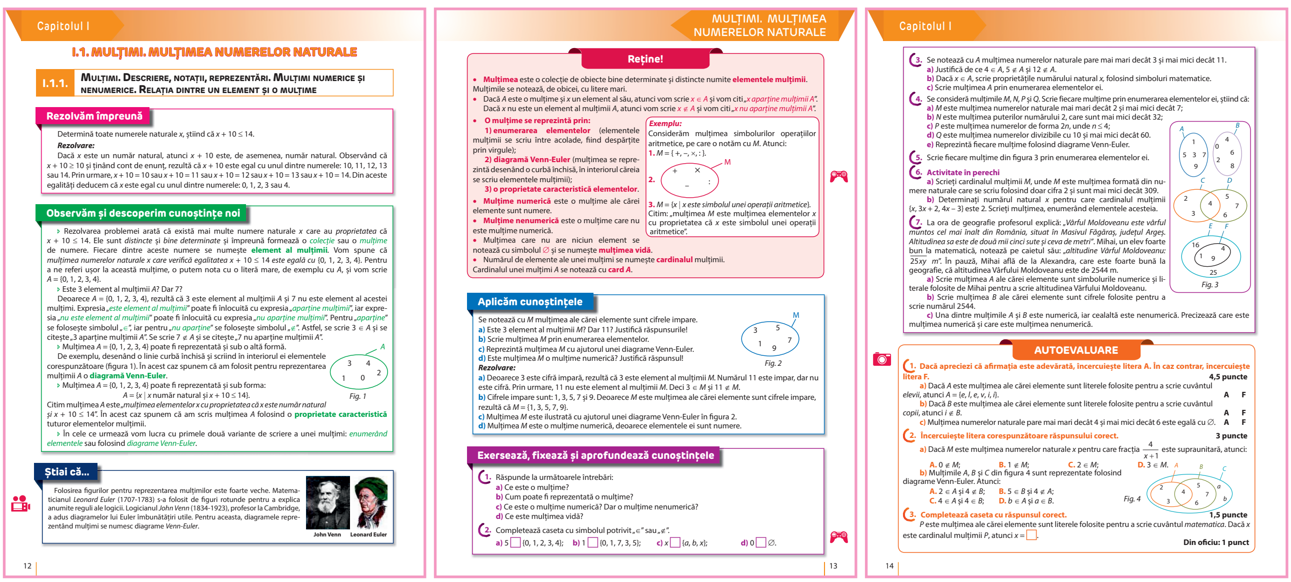
Manualul este organizat pe *capitole* și *unități de învățare*, care acoperă integral domeniile de conținut și asigură atât formarea, cât și dezvoltarea competențelor generale și specifice ale elevilor.

Fiecare unitate de învățare cuprinde *lecții de predare-învățare*, *exerciții și probleme recapitulative* – care constituie un suport pentru lecțiile recapitulative – și se finalizează printr-un test de *evaluare,* care acoperă întreaga gamă a tipologiei itemilor obiectivi, semiobiectivi și subiectivi.

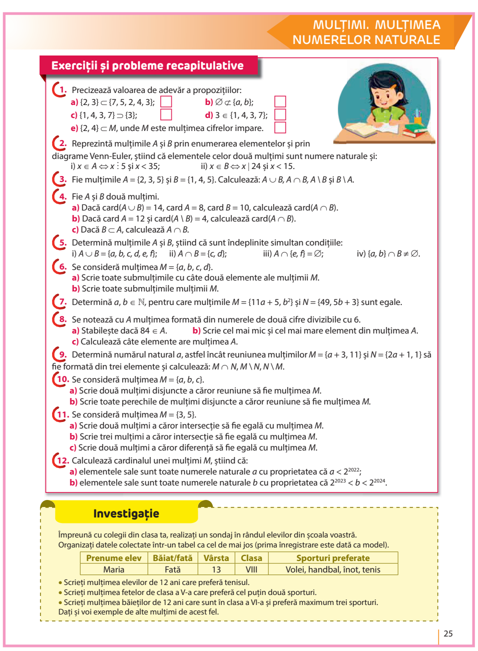
Secvențele metodice ale unei lecții sunt: *Ne amintim*, *Rezolvăm împreună*, *Observăm și descoperim cunoștințe noi*, *Reține!*, *Aplicăm cunoștințele*, *Exersează, fixează și aprofundează cunoștințele,* acestea asigurând un demers didactic coerent și eficient. Lecția se finalizează cu test de *autoevaluare*, care permite elevilor măsurarea nivelului de competențe atins.

Manualul propune instrumente complementare de evaluare a activității: *portofoliu, proiect, investigație, observarea sistematică a activității și a comportamentului elevului.*

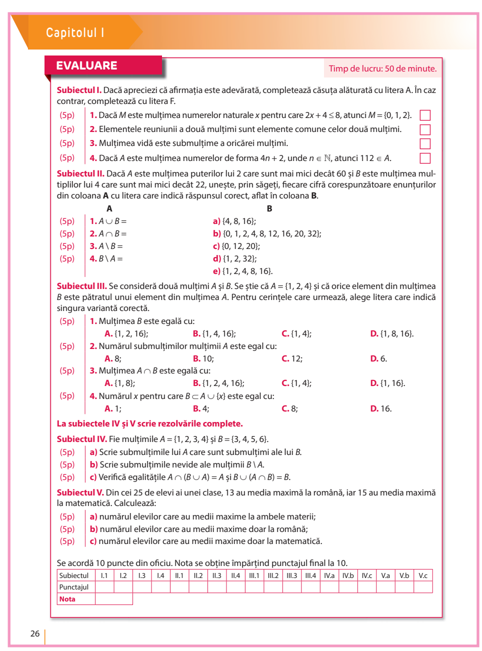
LECȚIE DE PREDARE-ÎNVĂȚARE



RECAPITULARE



EVALUARE



COMPETENȚE GENERALE ȘI SPECIFICE

1. Identificarea unor date, mărimi și relații matematice, în contextul în care acestea apar

1.1. Identificarea unor noțiuni specifice mulțimilor și relației de divizibilitate în $\mathbb{N}$
1.2. Identificarea rapoartelor, proporțiilor și a mărimilor direct sau invers proporționale
1.3. Identificarea caracteristicilor numerelor întregi în contexte variate
1.4. Recunoașterea fracțiilor echivalente, a fracțiilor ireductibile și a formelor de scriere a unui număr rațional
1.5. Recunoașterea unor figuri geometrice plane (drepte, unghiuri, cercuri, arce de cerc) în configurații date
1.6. Recunoașterea unor elemente de geometrie plană asociate noțiunii de triunghi

2. Prelucrarea unor date matematice de tip cantitativ, calitativ, structural, cuprinse în diverse surse informaționale

2.1. Evidențierea în exemple a relațiilor de apartenență, de incluziune, de egalitate și a criteriilor de divizibilitate cu 2, 5, 10^n, 3 și 9 în $\mathbb{N}$
2.2. Prelucrarea cantitativă a unor date utilizând rapoarte și proporții pentru organizarea de date
2.3. Utilizarea operațiilor cu numere întregi pentru rezolvarea ecuațiilor și inecuațiilor
2.4. Aplicarea regulilor de calcul cu numere raționale pentru rezolvarea ecuațiilor de tipul: $x + a = b$, $x \cdot a = b$, $x : a = b$ ($a \neq 0$), $ax + b = c$, unde a, b și c sunt numere raționale
2.5. Recunoașterea coliniarității unor puncte, a faptului că două unghiuri sunt opuse la vârf, adiacente, complementare sau suplementare și a paralelismului sau perpendicularității a două drepte
2.6. Calcularea unor lungimi de segmente, măsuri de unghiuri în contextul geometriei triunghiului

3. Utilizarea conceptelor și a algoritmilor specifici în diverse contexte matematice

3.1. Utilizarea unor modalități adecvate de reprezentare a mulțimilor și de determinare a *c.m.m.d.c.* și a *c.m.m.m.c.*
3.2. Aplicarea unor metode specifice de rezolvare a problemelor în care intervin rapoarte, proporții și mărimi direct/invers proporționale
3.3. Aplicarea regulilor de calcul și folosirea parantezelor în efectuarea operațiilor cu numere întregi
3.4. Utilizarea proprietăților operațiilor pentru compararea și efectuarea calculelor cu numere raționale
3.5. Utilizarea unor proprietăți referitoare la distanțe, drepte, unghiuri, cerc pentru realizarea unor construcții geometrice
3.6. Utilizarea criteriilor de congruență și a proprietăților unor triunghiuri particulare pentru determinarea caracteristicilor unei configurații geometrice

4. Exprimarea în limbajul specific matematicii a informațiilor, concluziilor și a demersurilor de rezolvare pentru o situație dată

4.1. Exprimarea în limbaj matematic a unor situații concrete care se pot descrie utilizând mulțimile și divizibilitatea în $\mathbb{N}$
4.2. Exprimarea în limbaj matematic a relațiilor și a mărimilor care apar în probleme cu rapoarte, proporții și mărimi direct sau invers proporționale
4.3. Redactarea etapelor de rezolvare a ecuațiilor și a inecuațiilor studiate în mulțimea numerelor întregi
4.4. Redactarea etapelor de rezolvare a unor probleme, folosind operații în mulțimea numerelor raționale
4.5. Exprimarea, prin reprezentări geometrice sau în limbaj specific matematic, a noțiunilor legate de dreaptă, unghi și cerc
4.6. Exprimarea în limbaj geometric simbolic și figurativ a caracteristicilor triunghiurilor și ale liniilor importante în triunghi

5. Analizarea caracteristicilor matematice ale unei situații date

5.1. Analizarea unor situații date în contextul mulțimilor și al divizibilității în $\mathbb{N}$
5.2. Analizarea unor situații practice cu ajutorul rapoartelor, proporțiilor și a colecțiilor de date
5.3. Interpretarea unor date din probleme care se rezolvă utilizând numerele întregi
5.4. Determinarea unor metode eficiente în efectuarea calculelor cu numere raționale
5.5. Analizarea seturilor de date numerice sau a reprezentărilor geometrice în vederea optimizării calculelor cu lungimi de segmente, distanțe, măsuri de unghiuri și de arce de cerc
5.6. Analizarea unor construcții geometrice în vederea evidențierii unor proprietăți ale triunghiurilor

6. Modelarea matematică a unei situații date, prin integrarea achizițiilor din diferite domenii

6.1. Transpunerea, în limbaj matematic, a unor situații date utilizând mulțimi, operații cu mulțimi și divizibilitatea în $\mathbb{N}$
6.2. Modelarea matematică a unei situații date în care intervin rapoarte, proporții și mărimi direct sau invers proporționale
6.3. Transpunerea, în limbaj algebric, a unei situații date, rezolvarea ecuației sau inecuației obținute și interpretarea rezultatului
6.4. Interpretarea matematică a unor probleme practice prin utilizarea operațiilor cu numere raționale
6.5. Interpretarea informațiilor conținute în reprezentări geometrice pentru determinarea unor lungimi de segmente, distanțe și a unor măsuri de unghiuri/arce de cerc
6.6. Transpunerea, în limbaj specific, a unei situații date legate de geometria triunghiului, rezolvarea problemei obținute și interpretarea rezultatului

TEST DE EVALUARE INIȚIALĂ 1

Timp de lucru: 50 de minute.

Subiectul I. Completează spațiile punctate, astfel încât să obții propoziții adevărate.

(5p) **1.** Rezultatul calculului 2,(6) + 1,5 – 0,8(3) este ....

(5p) **2.** Suma divizorilor numărului 3^3 este egală cu ....

(5p) **3.** Rezultatul calculului $1\frac{1}{2}-\left[\frac{3}{4}-\left(1-\frac{3}{8}\right)\right]$ este ....

(5p) **4.** Cel mai mic număr natural n care, împărțit pe rând la numerele 6, 8 și 10, dă de fiecare dată restul 5 este ....

Subiectul II. Unește, prin săgeți, fiecare enunț aflat în coloana **A** cu răspunsul corespunzător aflat în coloana **B**.

	A	B
(5p)	**1.** Aproximarea prin adaos la mii a numărului 247369 este ...	**a)** 1;
(5p)	**2.** Rotunjirea la mii a numărului 247369 este ...	**b)** 248000;
(5p)	**3.** Ultima cifră a numărului 2029^{2026} este ...	**c)** 247000;
(5p)	**4.** Ultima cifră a numărului 2022^{2024} este ...	**d)** 6;
		e) 9.

Subiectul III. Alege litera corespunzătoare singurului răspuns corect.

(5p) **1.** Dacă $2^{23}+2^{23}=2^n$, atunci n este egal cu:
A. 22; **B.** 23; **C.** 26; **D.** 24.

(5p) **2.** Dacă $5^{25}:5^{23}=5^n$, atunci n este egal cu:
A. 48; **B.** 2; **C.** 24; **D.** 3.

(5p) **3.** Dacă $\overline{ab}+\overline{bc}+\overline{ca}=\overline{abc}$, atunci $a+b+c$ este egal cu:
A. 11; **B.** 21; **C.** 18; **D.** 14.

(5p) **4.** Dacă $\overline{abc}+\overline{bca}+\overline{cab}=999$, atunci $a+b+c$ este egal cu:
A. 18; **B.** 9; **C.** 14; **D.** 27.

Subiectul IV. Scrie rezolvările complete.

(10p) **1.** Dacă 3 robinete umplu un bazin în 60 de minute, calculează în câte minute vor umple bazinul 6 robinete de același tip.

(10p) **2.** În 16 vase sunt 62 ℓ de apă. Unele vase au capacitatea de 3 ℓ, iar altele de 10 ℓ. Determină câte vase au capacitatea de 3 ℓ.

(10p) **3.** Împărțind un număr natural la un alt număr natural obținem câtul 2 și restul 26. Calculează cele două numere, știind că suma lor este 137.

Se acordă 10 puncte din oficiu. Nota se obține împărțind punctajul final la 10.

Subiectul	I.1	I.2	I.3	I.4	II.1	II.2	II.3	II.4	III.1	III.2	III.3	III.4	IV.1	IV.2	IV.3
Punctajul															
Nota															

TEST DE EVALUARE INIȚIALĂ 2

Timp de lucru: 50 de minute.

Subiectul I. Completează spațiile punctate, astfel încât să obții propoziții adevărate.

(5p) **1.** Trei sau mai multe puncte se numesc coliniare, dacă ....

(5p) **2.** Două unghiuri se numesc congruente, dacă ....

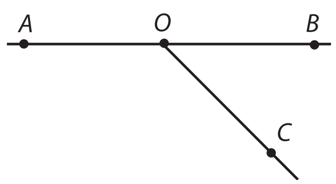
(5p) **3.** Prin distanța dintre două puncte A și B se înțelege ....

(5p) **4.** Un punct M este mijlocul segmentului AB, dacă ....

Subiectul II. Unește, prin săgeți, fiecare enunț aflat în coloana **A** cu răspunsul corespunzător aflat în coloana **B**.

Observă cu atenție desenul de mai jos și stabilește tipul unghiurilor din coloana A.

	A	B
(5p)	**1.** $\sphericalangle AOB$ este ...	**a)** unghi drept;
(5p)	**2.** $\sphericalangle AOC$ este ...	**b)** unghi nul;
(5p)	**3.** $\sphericalangle BOC$ este ...	**c)** unghi ascuțit;
(5p)	**4.** $\sphericalangle OAB$ este ...	**d)** unghi obtuz;
		e) unghi alungit.



Subiectul III. Alege litera corespunzătoare singurului răspuns corect.

(5p) **1.** Suma măsurilor a două unghiuri este egală cu $116°15'$. Dacă unul dintre unghiuri are măsura cu $20°17'$ mai mare decât a celuilalt, atunci măsura unghiului mai mic este egală cu:

A. $45°47'$; **B.** $47°59'$; **C.** $68°16'$; **D.** $18°59'$.

(5p) **2.** Cinci puncte distincte, dintre care oricare trei sunt necoliniare, determină:

A. 5 drepte; **B.** 10 drepte; **C.** 12 drepte; **D.** 8 drepte.

(5p) **3.** Se notează cu O mijlocul segmentului MN și cu Q simetricul punctului O față de punctul N. Dacă $MN = 4$ cm, atunci lungimea segmentului MQ este egală cu:

A. 2 cm; **B.** 4 cm; **C.** 6 cm; **D.** 8 cm.

(5p) **4.** Dacă P este un punct interior unui unghi drept MON și $\sphericalangle NOP = 3 \cdot \sphericalangle MOP$, atunci măsura unghiului MOP este egală cu:

A. $22°30'$; **B.** $30°$; **C.** $45°$; **D.** $60°$.

Subiectul IV. Scrie rezolvările complete.

1. Un unghi AOB are măsura egală cu $108°$, iar C este un punct exterior acestuia, astfel încât măsura unghiului BOC este egală cu $0,(6)$ din măsura unghiului AOB. Fie D un punct interior unghiului AOB, astfel încât măsura unghiului BOD să fie cu $36°$ mai mică decât măsura unghiului AOD.

(5p) **a)** Calculează măsura unghiului BOC.

(5p) **b)** Arată că punctele A, O, C sunt coliniare.

(5p) **c)** Arată că unghiurile AOD și BOC sunt congruente.

2. Se consideră un unghi alungit MON și semidreptele OP și OR, situate în același semiplan față de dreapta MN, astfel încât unghiul POR să fie un unghi drept și semidreapta OR să fie interioară unghiului MOP. Se știe că $\sphericalangle PON = \frac{1}{4} \cdot \sphericalangle ROM$, iar OS este semidreapta opusă semidreptei OP.

(5p) **a)** Calculează măsurile unghiurilor PON și ROM.

(5p) **b)** Arată că unghiul ROS este un unghi drept.

(5p) **c)** Calculează măsura unghiului SOM.

Se acordă 10 puncte din oficiu. Nota se obține împărțind punctajul final la 10.

Subiectul	I.1	I.2	I.3	I.4	II.1	II.2	II.3	II.4	III.1	III.2	III.3	III.4	IV.1.a	IV.1.b	IV.1.c	IV.2.a	IV.2.b	IV.2.c
Punctajul																		
Nota																		

CAPITOLUL I

MULȚIMI. MULȚIMEA NUMERELOR NATURALE

CUPRINS

I.1. MULȚIMI. MULȚIMEA NUMERELOR NATURALE

I.1.1. Mulțimi. Descriere, notații, reprezentări. Mulțimi numerice și nenumerice. Relația dintre un element și o mulțime

Rezolvăm împreună

Determină toate numerele naturale x, știind că $x + 10 \leq 14$.

Rezolvare:

Dacă x este un număr natural, atunci $x + 10$ este, de asemenea, număr natural. Observând că $x + 10 \geq 10$ și ținând cont de enunț, rezultă că $x + 10$ este egal cu unul dintre numerele: 10, 11, 12, 13 sau 14. Prin urmare, $x + 10 = 10$ sau $x + 10 = 11$ sau $x + 10 = 12$ sau $x + 10 = 13$ sau $x + 10 = 14$. Din aceste egalități deducem că x este egal cu unul dintre numerele: 0, 1, 2, 3 sau 4.

Observăm și descoperim cunoștințe noi

- Rezolvarea problemei arată că există mai multe numere naturale x care au *proprietatea* că $x + 10 \leq 14$. Ele sunt *distincte* și *bine determinate* și împreună formează o *colecție* sau o *mulțime* de numere. Fiecare dintre aceste numere se numește **element al mulțimii**. Vom spune că *mulțimea numerelor naturale x care verifică egalitatea* $x + 10 \leq 14$ *este egală cu* $\{0, 1, 2, 3, 4\}$. Pentru a ne referi ușor la această mulțime, o putem nota cu o literă mare, de exemplu cu A, și vom scrie $A = \{0, 1, 2, 3, 4\}$.
- Este 3 element al mulțimii A? Dar 7?

Deoarece $A = \{0, 1, 2, 3, 4\}$, rezultă că 3 este element al mulțimii A și 7 nu este element al acestei mulțimi. Expresia „*este element al mulțimii*” poate fi înlocuită cu expresia „*aparține mulțimii*”, iar expresia „*nu este element al mulțimii*” poate fi înlocuită cu expresia „*nu aparține mulțimii*”. Pentru „*aparține*” se folosește simbolul „$\in$”, iar pentru „*nu aparține*” se folosește simbolul „$\notin$”. Astfel, se scrie $3 \in A$ și se citește „3 aparține mulțimii A”. Se scrie $7 \notin A$ și se citește „7 nu aparține mulțimii A”.

- Mulțimea $A = \{0, 1, 2, 3, 4\}$ poate fi reprezentată și sub o altă formă.

De exemplu, desenând o linie curbă închisă și scriind în interiorul ei elementele corespunzătoare (figura 1). În acest caz spunem că am folosit pentru reprezentarea mulțimii A o **diagramă Venn-Euler**.

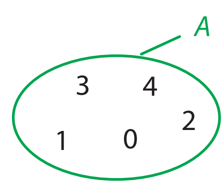


Fig. 1

- Mulțimea $A = \{0, 1, 2, 3, 4\}$ poate fi reprezentată și sub forma:

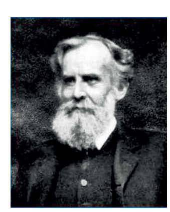
$$A = \{x \mid x \text{ număr natural și } x + 10 \leq 14\}.$$

Citim mulțimea A este „*mulțimea elementelor x cu proprietatea că x este număr natural și* $x + 10 \leq 14$”. În acest caz spunem că am scris mulțimea A folosind o **proprietate caracteristică** tuturor elementelor mulțimii.

- În cele ce urmează vom lucra cu primele două variante de scriere a unei mulțimi: *enumerând elementele* sau folosind *diagrame Venn-Euler*.

Știai că...

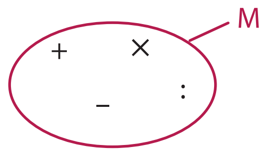
Folosirea figurilor pentru reprezentarea mulțimilor este foarte veche. Matematicianul *Leonard Euler* (1707-1783) s-a folosit de figuri rotunde pentru a explica anumite reguli ale logicii. Logicianul *John Venn* (1834-1923), profesor la Cambridge, a adus diagramelor lui Euler îmbunătățiri utile. Pentru aceasta, diagramele reprezentând mulțimi se numesc diagrame *Venn-Euler*.


John Venn


Leonard Euler

Reține!

- **Mulțimea** este o colecție de obiecte bine determinate și distincte numite **elementele mulțimii**. Mulțimile se notează, de obicei, cu litere mari.
- Dacă A este o mulțime și x un element al său, atunci vom scrie $x \in A$ și vom citi *„x aparține mulțimii A"*. Dacă x nu este un element al mulțimii A, atunci vom scrie $x \notin A$ și vom citi *„x nu aparține mulțimii A"*.
- **O mulțime se reprezintă prin:**
  1) enumerarea elementelor (elementele mulțimii se scriu între acolade, fiind despărțite prin virgule);
  2) diagramă Venn-Euler (mulțimea se reprezintă desenând o curbă închisă, în interiorul căreia se scriu elementele mulțimii);
  3) o proprietate caracteristică elementelor.

Exemplu:
Considerăm mulțimea simbolurilor operațiilor aritmetice, pe care o notăm cu M. Atunci:
1. $M = \{+, -, \times, :\}$.
2.


3. $M = \{x \mid x$ *este simbolul unei operații aritmetice*$\}$.
Citim: „mulțimea M este mulțimea elementelor x cu proprietatea că x este simbolul unei operații aritmetice".

- **Mulțime numerică** este o mulțime ale cărei elemente sunt numere.
- **Mulțime nenumerică** este o mulțime care nu este mulțime numerică.
- Mulțimea care nu are niciun element se notează cu simbolul $\varnothing$ și se numește **mulțimea vidă**.
- Numărul de elemente ale unei mulțimi se numește **cardinalul** mulțimii. Cardinalul unei mulțimi A se notează cu **card** A.

Aplicăm cunoștințele

Se notează cu M mulțimea ale cărei elemente sunt cifrele impare.
a) Este 3 element al mulțimii M? Dar 11? Justifică răspunsurile!
b) Scrie mulțimea M prin enumerarea elementelor.
c) Reprezintă mulțimea M cu ajutorul unei diagrame Venn-Euler.
d) Este mulțimea M o mulțime numerică? Justifică răspunsul!

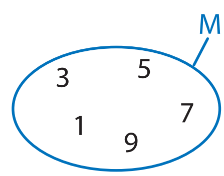


Fig. 2

Rezolvare:
a) Deoarece 3 este cifră impară, rezultă că 3 este element al mulțimii M. Numărul 11 este impar, dar nu este cifră. Prin urmare, 11 nu este element al mulțimii M. Deci $3 \in M$ și $11 \notin M$.
b) Cifrele impare sunt: 1, 3, 5, 7 și 9. Deoarece M este mulțimea ale cărei elemente sunt cifrele impare, rezultă că $M = \{1, 3, 5, 7, 9\}$.
c) Mulțimea M este ilustrată cu ajutorul unei diagrame Venn-Euler în figura 2.
d) Mulțimea M este o mulțime numerică, deoarece elementele ei sunt numere.

Exersează, fixează și aprofundează cunoștințele

1. Răspunde la următoarele întrebări:
a) Ce este o mulțime?
b) Cum poate fi reprezentată o mulțime?
c) Ce este o mulțime numerică? Dar o mulțime nenumerică?
d) Ce este mulțimea vidă?

2. Completează caseta cu simbolul potrivit „$\in$" sau „$\notin$".
a) $5 \square \{0, 1, 2, 3, 4\}$; **b)** $1 \square \{0, 1, 7, 3, 5\}$; **c)** $x \square \{a, b, x\}$; **d)** $0 \square \varnothing$.

3. Se notează cu *A* mulțimea numerelor naturale pare mai mari decât 3 și mai mici decât 11.
a) Justifică de ce $4 \in A$, $5 \notin A$ și $12 \notin A$.
b) Dacă $x \in A$, scrie proprietățile numărului natural *x*, folosind simboluri matematice.
c) Scrie mulțimea *A* prin enumerarea elementelor ei.

4. Se consideră mulțimile *M*, *N*, *P* și *Q*. Scrie fiecare mulțime prin enumerarea elementelor ei, știind că:
a) *M* este mulțimea numerelor naturale mai mari decât 2 și mai mici decât 7;
b) *N* este mulțimea puterilor numărului 2, care sunt mai mici decât 32;
c) *P* este mulțimea numerelor de forma $2n$, unde $n \leq 4$;
d) *Q* este mulțimea numerelor divizibile cu 10 și mai mici decât 60.
e) Reprezintă fiecare mulțime folosind diagrame Venn-Euler.

5. Scrie fiecare mulțime din figura 3 prin enumerarea elementelor ei.

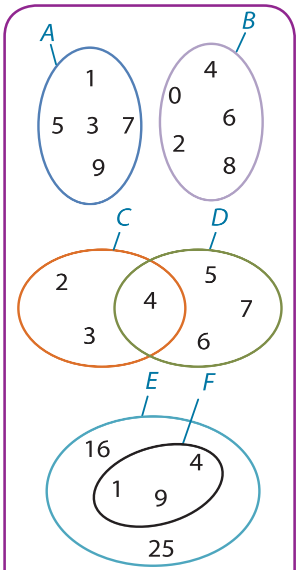


Fig. 3

6. Activitate în perechi
a) Scrieți cardinalul mulțimii *M*, unde *M* este mulțimea formată din numere naturale care se scriu folosind doar cifra 2 și sunt mai mici decât 309.
b) Determinați numerele naturale *x* pentru care cardinalul mulțimii $\{x, 3x + 2, 4x - 3\}$ este 2. Scrieți mulțimea, enumerând elementele acesteia.

7. La ora de geografie profesorul explică: *„Vârful Moldoveanu este vârful muntos cel mai înalt din România, situat în Masivul Făgăraș, județul Argeș. Altitudinea sa este de două mii cinci sute și ceva de metri”*. Mihai, un elev foarte bun la matematică, notează pe caietul său: *„altitudine Vârful Moldoveanu:* $\overline{25xy}$ *m”*. În pauză, Mihai află de la Alexandra, care este foarte bună la geografie, că altitudinea Vârfului Moldoveanu este de 2544 m.
a) Scrie mulțimea *A* ale cărei elemente sunt simbolurile numerice și literale folosite de Mihai pentru a scrie altitudinea Vârfului Moldoveanu.
b) Scrie mulțimea *B* ale cărei elemente sunt cifrele folosite pentru a scrie numărul 2544.
c) Una dintre mulțimile *A* și *B* este numerică, iar cealaltă este nenumerică. Precizează care este mulțimea numerică și care este mulțimea nenumerică.

AUTOEVALUARE

10 min

1. Dacă apreciezi că afirmația este adevărată, încercuiește litera A. În caz contrar, încercuiește litera F. **4,5 puncte**

a) Dacă *A* este mulțimea ale cărei elemente sunt literele folosite pentru a scrie cuvântul *elevii*, atunci $A = \{e, l, e, v, i, i\}$. **A F**

b) Dacă *B* este mulțimea ale cărei elemente sunt literele folosite pentru a scrie cuvântul *copii*, atunci $i \notin B$. **A F**

c) Mulțimea numerelor naturale pare mai mari decât 4 și mai mici decât 6 este egală cu $\varnothing$. **A F**

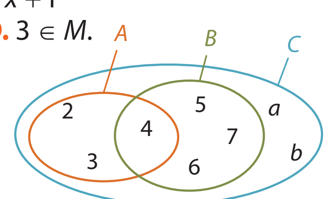
2. Încercuiește litera corespunzătoare răspunsului corect. **3 puncte**

a) Dacă *M* este mulțimea numerelor naturale *x* pentru care fracția $\frac{4}{x+1}$ este supraunitară, atunci:

A. $0 \notin M$; **B.** $1 \notin M$; **C.** $2 \in M$; **D.** $3 \in M$.

b) Mulțimile *A*, *B* și *C* din figura 4 sunt reprezentate folosind diagrame Venn-Euler. Atunci:

A. $2 \in A$ și $4 \notin B$; **B.** $5 \in B$ și $4 \notin A$;
C. $4 \in A$ și $4 \in B$; **D.** $b \in A$ și $a \in B$.

Fig. 4


3. Completează caseta cu răspunsul corect. **1,5 puncte**

P este mulțimea ale cărei elemente sunt literele folosite pentru a scrie cuvântul *matematica*. Dacă *x* este cardinalul mulțimii *P*, atunci $x = \square$.

Din oficiu: 1 punct

I.1.2. Relații între mulțimi

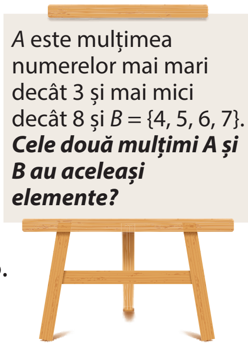
Rezolvăm împreună

Se consideră mulțimile:

- *A* – mulțimea numerelor mai mari decât 3 și mai mici decât 8;
- *B* – mulțimea numerelor 4, 5, 6 și 7;
- *C* – mulțimea numerelor de două cifre mai mici decât 14;
- *D* – mulțimea numerelor mai mari sau egale cu 10 și mai mici decât 17;
- *E* – mulțimea numerelor mai mari sau egale cu 2 și mai mici sau egale cu 6.

a) Identifică două mulțimi care au aceleași elemente.

b) Identifică o mulțime ale cărei elemente sunt și elemente ale mulțimii *D*.



Rezolvare:

Scriem fiecare mulțime *A*, *B*, *C*, *D* și *E* prin enumerarea elementelor: $A = \{4, 5, 6, 7\}$, $B = \{4, 5, 6, 7\}$, $C = \{10, 11, 12, 13\}$, $D = \{10, 11, 12, 13, 14, 15, 16\}$ și $E = \{2, 3, 4, 5, 6\}$.

a) Cum $A = \{4, 5, 6, 7\}$ și $B = \{4, 5, 6, 7\}$, rezultă că mulțimile *A* și *B* sunt *două mulțimi care au aceleași elemente*.

b) Cum $C = \{10, 11, 12, 13\}$ și $D = \{10, 11, 12, 13, 14, 15, 16\}$, un exemplu de *mulțime ale cărei elemente sunt și elemente ale mulțimii D* este *mulțimea C*.

Observăm și descoperim cunoștințe noi

1. Rezolvarea anterioară arată că există *mulțimi care au aceleași elemente*. Din acest motiv, despre două mulțimi care au aceleași elemente spunem că sunt **mulțimi egale**. Prin urmare, mulțimile *A* și *B* sunt mulțimi egale. Notăm $A = B$.

Mai observăm, de exemplu, că mulțimile *A* și *E* nu au aceleași elemente, deci *A* și *E* nu sunt mulțimi egale. Notăm $A \neq E$.

2. Deoarece toate elementele mulțimii *C* sunt și elemente ale mulțimii *D*, despre mulțimea *C* spunem că este **inclusă** în mulțimea *D*. Notăm $C \subset D$ și citim „*mulțimea C este inclusă în mulțimea D*". Se mai spune că *mulțimea D include mulțimea C*. Notăm $D \supset C$.

Mai observăm, de exemplu, că nu orice element al mulțimii *A* este și element al mulțimii *E*. Spunem că *mulțimea A nu este inclusă în mulțimea E*. Notăm $A \not\subset E$. Se mai spune că *mulțimea E nu include mulțimea A*. Notăm $E \not\supset A$.

Știai că...

Georg Ferdinand Ludwig Philipp Cantor (1845-1918), matematician german, a fost unul dintre inițiatorii studiului sistematic al *teoriei mulțimilor*, care a devenit o *teorie fundamentală a matematicii*. El a definit *mulțimile infinite*, conceptul de *cardinal al unei mulțimi* și a introdus construcții fundamentale în teoria mulțimilor, cum ar fi *mulțimea părților unei mulțimi*; aceasta este mulțimea tuturor submulțimilor posibile ale unei mulțimi, iar Cantor a arătat că numărul tuturor submulțimilor unei mulțimi cu *n* elemente este 2^n.


Philipp Cantor

Reține!

- Două mulțimi sunt **egale** dacă au aceleași elemente. Dacă A și B sunt două mulțimi egale, notăm $A = B$, iar dacă nu sunt egale notăm $A \neq B$.
- O mulțime este **inclusă** într-o altă mulțime, dacă toate elementele primei mulțimi sunt și elemente ale celeilalte mulțimi.
- Mulțimea vidă este submulțime a oricărei mulțimi: $\varnothing \subset A$, oricare ar fi mulțimea A.
- Orice mulțime este inclusă în ea însăși: $A \subset A$, oricare ar fi mulțimea A.
- Două mulțimi sunt egale dacă și numai dacă fiecare dintre ele este o submulțime a celeilalte mulțimi: dacă $A \subset B$ și $B \subset A$, atunci $A = B$.

notezi	citești
$A = B$	mulțimile A și B sunt egale
$A \neq B$	mulțimile A și B nu sunt egale
$A \subset B$ sau $B \supset A$	mulțimea A este inclusă în mulțimea B mulțimea A este o submulțime a mulțimii B mulțimea A este o parte a mulțimii B mulțimea B include mulțimea A
$A \not\subset B$ sau $B \not\supset A$	mulțimea A nu este inclusă în mulțimea B mulțimea B nu include mulțimea A

Aplicăm cunoștințele

Se consideră mulțimile: $A = \{3, 4\}$, $B = \{1, 2, 3, 4\}$, $C = \{3, 4, 5, 6, 7\}$ și $D = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$, reprezentate în diagrama din figura 1.

a) Copiați și completați în căsuța alăturată enunțului litera A, dacă enunțul este adevărat. În caz contrar, completați litera F.

$B \subset D$ $\square$; $C \subset B$ $\square$; $C \subset D$ $\square$; $A \subset D$ $\square$.

b) Una dintre mulțimile date le conține pe celelalte trei. Numește mulțimea respectivă și scrie relația dintre aceasta și celelalte trei mulțimi.

c) Una dintre mulțimi este conținută de celelalte trei. Numește mulțimea respectivă și scrie relația dintre aceasta și celelalte trei mulțimi.

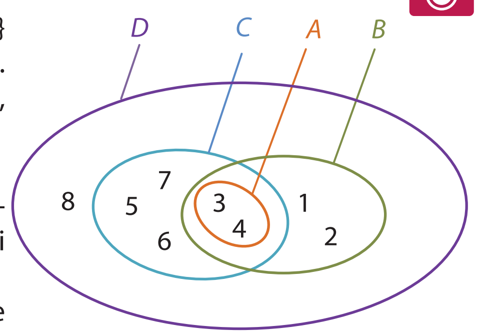


Fig. 1

Rezolvare:

a) $B \subset D$ deoarece orice element al mulțimii B este și element al mulțimii D.
$C \not\subset B$ deoarece nu orice element al mulțimii C este și element al mulțimii B. De exemplu, $5 \in C$ și $5 \notin B$.
$C \subset D$ deoarece orice element al mulțimii C este și element al mulțimii D.
$A \subset D$ deoarece orice element al mulțimii A este și element al mulțimii D.
Rezultă: $B \subset D$ $\boxed{A}$; $C \subset B$ $\boxed{F}$; $C \subset D$ $\boxed{A}$; $A \subset D$ $\boxed{A}$.

b) Mulțimea D le conține pe celelalte trei mulțimi: $A \subset D$, $B \subset D$ și $C \subset D$.

c) Mulțimea A este conținută în celelalte trei mulțimi: $A \subset B$, $A \subset C$ și $A \subset D$.

Exersează, fixează și aprofundează cunoștințele

1. **a)** Despre două mulțimi A și B se știe că $A \subset B$ și $B \subset A$. Sunt mulțimile A și B egale? Justifică răspunsul.

b) Despre două mulțimi A și B se știe că $A = B$. Se poate spune că $A \subset B$ și $B \subset A$? Justifică răspunsul.

2. Determină mulțimea M, pentru care $\{a, b\} \subset M \subset \{a, b, c, d, e\}$.

3. Determină numărul natural n pentru care mulțimile $A = \{2n + 3, 3n + 2\}$ și $B = \{9, 11\}$ sunt egale.

4. Regiunile istorice ale României sunt: Banat, Bucovina, Crișana, Dobrogea, Maramureș, Moldova, Muntenia, Oltenia și Transilvania (figura 2). Se notează cu M mulțimea ale cărei elemente sunt orașele *Arad*, *Brașov*, *București*, *Cluj*, *Constanța*, *Covasna*, *Craiova*, *Deva*, *Galați*, *Miercurea Ciuc*, *Iași*, *Sfântu Gheorghe*, *Timișoara*, *Târgu Mureș*.

a) Scrie submulțimea mulțimii M, care conține orașele din Transilvania.

b) Scrie submulțimea mulțimii M, care conține orașele din Moldova.

Fig. 2

5. Se consideră mulțimile:

$A = \{0, 1, 2, 3, \dots, 100\}$ și $B = \{1, 2, 3, 4, \dots, 101\}$.

Elementele unei mulțimi C sunt numerele de forma $2x + 1$, unde $x \in A$, iar elementele unei mulțimi D sunt numerele de forma $2x - 1$, unde $x \in B$. Arată că:

a) $201 \in C$ și $203 \notin C$; **b)** $201 \in D$ și $200 \notin D$; **c)** $C = D$.

6. Se consideră mulțimea $A = \{0, 1, 2, 3, \dots, 100\}$ și două mulțimi B și C. Elementele mulțimii B sunt numerele de forma $2x$, unde $x \in A$, iar elementele mulțimii C sunt numerele de forma $4x$, unde $x \in A$. Arată că:

a) $52 \in B$ și $52 \in C$; **b)** $82 \in B$ și $82 \notin C$;

c) mulțimile B și C au același cardinal, dar nu sunt egale.

7. Se consideră mulțimile A și B.

a) Dacă mulțimea A are cinci elemente, calculează numărul submulțimilor mulțimii A care au două elemente și numărul submulțimilor mulțimii A care au patru elemente.

b) Dacă mulțimea A are cinci elemente, determină numărul submulțimilor mulțimii A.

c) Calculează cardinalul mulțimii B, știind că are exact 16 submulțimi.

8. Fie un număr natural x, $x > 2$.

a) Scrie în ordine crescătoare numerele: $2x + 1$, $x + 3$, $x - 2$, $3x$.

b) Determină numărul x pentru care mulțimile $A = \{2x + 1, x + 3, x - 2, 3x\}$ și $B = \{3, 8, 11, 15\}$ sunt egale.

AUTOEVALUARE

1. Dacă apreciezi că afirmația este adevărată, încercuiește litera A. În caz contrar, încercuiește litera F. **3 puncte**

a) $\{2, 3, 8\} \supset \{1, 2, 3, 6, 8, 10\}$. A F

b) $\{25\} \subset M$, unde M este mulțimea pătratelor numerelor naturale. A F

c) $\varnothing \subset \{0\}$. A F

2. Unește, prin săgeți, fiecare enunț aflat în coloana din stânga cu răspunsul corespunzător aflat în coloana din dreapta. **4,5 puncte**

a) Dacă orice element al mulțimii A este element al mulțimii B, atunci ...

b) Dacă există cel puțin un element al mulțimii A care nu este element al mulțimii B, atunci ...

c) Dacă orice element al mulțimii A este element al mulțimii B și orice element al mulțimii B este element al mulțimii A, atunci ...

1) $B \subset A$;

2) $A = B$;

3) $A \subset B$;

4) $A \neq B$.

3. Completează caseta cu răspunsul corect. **1,5 puncte**

Numărul tuturor submulțimilor unei mulțimi M cu 4 elemente este egal cu $\boxed{}$.

Din oficiu: 1 punct

I.1.3. Mulțimi finite. Mulțimi infinite. Mulțimea numerelor naturale

Rezolvăm împreună

Dacă n este un număr natural oarecare, atunci numărul $n + 1$ se numește *succesorul* numărului natural n. De exemplu, 6 este succesorul lui 5, deoarece $6 = 5 + 1$.

Mihai scrie pe o foaie de hârtie mulțimea A a numerelor naturale mai mici decât 8 și îi propune Soniei următorul joc: un jucător scrie cel mai mic număr din mulțimea A, iar al doilea va scrie succesorul numărului scris de primul jucător. Apoi, primul jucător va scrie succesorul numărului scris de cel de-al doilea jucător și așa mai departe. Jocul se termină atunci când unul dintre jucători scrie cel mai mare număr din mulțime. Jucătorul respectiv este declarat câștigător.

Vlad și Mircea joacă și ei acest joc, dar, în locul mulțimii A, ei consideră mulțimea B a numerelor naturale mai mari sau egale cu 8.

a) Explică de ce $3 \in A$ și $8 \notin A$.
b) Scrie toate elementele mulțimii A.
c) Câte elemente are mulțimea A?
d) Explică de ce $8 \in B$ și $3 \notin B$.
e) Poți scrie toate elementele mulțimii B?
f) Câte elemente are mulțimea B?

Rezolvare:

a) $3 \in A$, deoarece 3 este număr natural și $3 < 8$; 8 este număr natural, dar 8 nu este mai mic decât 8, deci $8 \notin A$.

b) Elementele mulțimii A sunt: 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7.

c) Mulțimea A are opt elemente.

d) $8 \in B$ deoarece 8 este număr natural și $8 \geq 8$; $3 \notin B$ deoarece 3 nu este mai mare sau egal cu 8.

e) Este evident că nu pot fi scrise toate elementele lui B!

f) Deoarece nu putem scrie toate elementele lui B, nu le putem număra, deci nu putem stabili câte elemente are mulțimea B.

Observăm și descoperim cunoștințe noi

În jocul lui Mihai cu Sonia mulțimea A are 8 elemente. Spunem despre mulțimea A că are un *număr finit* de elemente și că A este o *mulțime finită*. Scriem: $A = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$.

Uneori este util să se folosească o scriere prescurtată: $A = \{0, 1, 2, ..., 7\}$, care sugerează că elementele mulțimii A sunt numerele naturale de la 0 până la 7. Cele trei puncte arată că sunt numere pe care nu le-am scris.

În jocul lui Vlad cu Mircea nu pot fi scrise toate elementele mulțimii B, deci nu putem stabili câte elemente are mulțimea B. Spunem despre mulțimea B că are o *infinitate* de elemente.
Scriem: $B = \{8, 9, 10, ...\}$ și vom spune că B este o *mulțime infinită*.

Alte exemple de mulțimi infinite

1. În geometrie, admitem că o dreaptă d este o mulțime de puncte, dar nu putem număra punctele ei. Deoarece pe dreapta d există un număr nesfârșit de puncte, spunem că dreapta d are o *infinitate* de puncte. Analog, semidreapta AB, determinată de punctele A și B, este o mulțime infinită de puncte. Segmentul MN, determinat de punctele M și N, este o mulțime infinită de puncte.

2. Cu șirul numerelor naturale 0, 1, 2, 3, ... putem forma o mulțime infinită de numere, pe care o numim **mulțimea numerelor naturale**. Pentru a ne referi la această mulțime folosim simbolul $\mathbb{N}$ și scriem: $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, ...\}$. Dacă din mulțimea numerelor naturale excludem numărul natural 0, obținem **mulțimea numerelor naturale nenule**, notată cu $\mathbb{N}^*$. Deci $\mathbb{N}^* = \{1, 2, 3, ...\}$.

Ne amintim

Numărul natural a este *divizibil* cu numărul natural nenul b dacă există un număr natural c, astfel încât $a = b \cdot c$. Numărul a din relația de mai sus se numește *multiplu* al numărului b, iar b se numește *divizor* al numărului a.

Notații: $a \,\vdots\, b$ („*a este divizibil cu b*”); $b \mid a$ („*b divide pe a*”).

Rezolvăm împreună

Fie n un număr natural oarecare. Vom nota cu D_n mulțimea tuturor divizorilor numărului n, iar cu M_n mulțimea tuturor multiplilor numărului n.

a) Scrie divizorii numărului 12.

b) Scrie mulțimea D_{12}.

c) Scrie multiplii numărului 3, mai mici decât 17.

d) Scrie mulțimea M_3.

e) Care dintre mulțimile D_{12} și M_3 este finită și care este infinită?

f) Dacă $p \in \mathbb{N}$, scrie mulțimea M_p.

Rezolvare:

a) Dacă x este divizor al lui 12, atunci $x \in \mathbb{N}$ și $12 \,\vdots\, x$. Rezultă că divizorii lui 12 sunt: 1, 2, 3, 4, 6 și 12.

b) Mulțimea divizorilor lui 12 este: $D_{12} = \{1, 2, 3, 4, 6, 12\}$.

c) Dacă x este un multiplu al numărului 3, atunci $x = 3n$ și $n \in \mathbb{N}$. Rezultă că multiplii lui 3 sunt: $3 \cdot 0, 3 \cdot 1, 3 \cdot 2, \ldots$. Prin urmare, multiplii lui 3 mai mici decât 17 sunt: 0, 3, 6, 9, 12, 15.

d) Mulțimea multiplilor lui 3 este $M_3 = \{0, 3, 6, 9, 12, 15, 18, \ldots\}$.

e) Mulțimea D_{12} este finită (are 6 elemente), iar mulțimea M_3 este infinită.

f) Dacă $x \in M_p$, atunci $x = np$ și $n \in \mathbb{N}$, deci $M_p = \{0, p, 2p, 3p, 4p, 5p, \ldots\}$.

Reține!

- **Mulțime finită** este o mulțime care are un număr finit de elemente.
- **Mulțime infinită** este o mulțime care nu este finită.
- Mulțimea $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, \ldots\}$ a numerelor naturale și mulțimea $\mathbb{N}^* = \{1, 2, 3, \ldots\}$ a numerelor naturale nenule sunt **mulțimi infinite**.
- Mulțimea tuturor divizorilor numărului natural nenul p, notată cu D_p, este mulțime finită.
- Mulțimea tuturor multiplilor numărului natural nenul p, notată cu M_p, este mulțime infinită.

Aplicăm cunoștințele

Scrie mulțimea A, știind că dacă $x \in A$, atunci $x \in \mathbb{N}^*$, $x \in M_2$, $x \in M_7$ și $x \leq 50$.

Rezolvare:

Deoarece $x \in \mathbb{N}^*$, rezultă că $x \neq 0$ (1). Deoarece $x \in M_2$, rezultă că $x \in \{0, 2, 4, 6, \ldots\}$ (2). Deoarece $x \in M_7$, rezultă că $x \in \{0, 7, 14, 21, 28, 35, 42, 49, 56, \ldots\}$ (3). Din (1), (2), (3) și $x \leq 50$ rezultă că $x \in \{14, 28, 42\}$. Deci $A = \{14, 28, 42\}$.

Știai că...

Cerul are cel mult zece mii de stele care pot fi văzute cu ochiul liber? Cu toate acestea, nu toată lumea poate vedea toate stelele; fiecare vede doar ce este deasupra capului în propria lui regiune.

Universul observabil conține o valoare estimată de 10^{24} stele, dar majoritatea sunt invizibile pentru ochiul liber (Universul observabil este o regiune sferică a Universului, care cuprinde toată materia ce poate fi observată de pe Pământ, inclusiv de către telescoapele spațiale și sondele de explorare).

Exersează, fixează și aprofundează cunoștințele

1. Răspunde la următoarele întrebări:
a) Ce este o mulțime finită?
b) Cum se numește o mulțime care nu are un număr finit de elemente?
c) De ce mulțimile $\mathbb{N}$ și $\mathbb{N}^*$ sunt mulțimi infinite?

2. Se consideră următoarele mulțimi:
A – mulțimea tuturor orașelor de pe planeta noastră;
B – mulțimea tuturor stelelor de pe cer, vizibile cu ochiul liber într-o seară senină de vară;
C – mulțimea tuturor stelelor din Univers.
Apreciază și numește, dintre mulțimile *A*, *B* și *C*, pe cele finite și pe cele infinite.

3. **a)** Determină elementele unei mulțimi A, știind că dacă $x \in A$, atunci $x \in \mathbb{N}$ și $x \,\vdots\, 12$.
b) Determină cardinalul unei mulțimi B, știind că dacă $x \in B$, atunci $x \in \mathbb{N}$ și $15 \,\vdots\, (x + 1)$.

4. Despre două mulțimi *A* și *B* se știe că:
- dacă n este un număr natural și $x = 1995n + 1$, atunci x aparține lui A;
- dacă p este un număr natural și $x = 1985p + 3$, atunci x aparține lui B.

a) Dacă se scriu mulțimile *A* și *B* prin enumerarea elementelor în ordine crescătoare, determină primele trei elemente ale fiecărei mulțimi.
b) Stabilește dacă mulțimile *A* și *B* au elemente comune. Justifică răspunsul.

5. Scrie mulțimea *M* prin enumerarea elementelor, știind că sunt îndeplinite următoarele condiții: i) elementele mulțimii *M* sunt numere naturale; ii) card $M = 6$; iii) $\{2, 7, 9\} \subset M$; iv) suma elementelor mulțimii *M* este egală cu 23.

6. Se notează cu *A* mulțimea resturilor împărțirii numerelor naturale la 10 și se consideră o mulțime *B* despre care se știe că oricare ar fi $x \in B$, numărul $x + 8$ este divizibil cu x.
a) Stabilește dacă mulțimea *A* este finită. Justifică răspunsul.
b) Stabilește dacă $B \subset A$. Justifică răspunsul.

7. Se consideră două mulțimi numerice *A* și *B*, astfel încât dacă un element x aparține mulțimii *A*, atunci elementul $y = x + 3$ aparține mulțimii *B*.
a) Știind că $A = \{0, 1, 2, 3\}$, scrie mulțimea *B* prin enumerarea elementelor și calculează cardinalul mulțimii *B*.
b) Dacă mulțimea *A* ar avea exact 10 elemente, arată că mulțimea *B* ar avea exact 10 elemente.
c) Arată că dacă mulțimea *A* este infinită, atunci și mulțimea *B* este infinită.

8. Despre elementele unei mulțimi *A* se știe că $1 \in A$ și că dacă $x \in A$, atunci $x + 2 \in A$. Stabilește dacă:
a) $11 \in A$; **b)** mulțimea *A* este infinită; **c)** $M_3 \subset A$.

Activitate în echipă / Portofoliu

Împreună cu colegii de clasă, dați cât mai multe exemple de mulțimi din domeniul matematicii sau din viața cotidiană, completând tabelul, după model. În cazul mulțimilor finite, precizați, dacă este posibil, cardinalul acestora.

Mulțimi finite	cardinal	Mulțimi infinite
mulțimea ferestrelor din sala de clasă	16	mulțimea numerelor naturale pare/impare
mulțimea mașinilor dintr-un oraș	–	mulțimea picăturilor de apă dintr-un ocean

Adăugați această activitate la portofoliul personal.

AUTOEVALUARE

1. Dacă apreciezi că afirmația este adevărată, încercuiește litera A. În caz contrar, încercuiește litera F. **4,5 puncte**

a) Mulțimea divizorilor numărului 24 este o mulțime finită. A F

b) Mulțimea multiplilor unui număr natural *p* este o mulțime infinită. A F

c) Dacă *A* și *B* sunt două puncte distincte care aparțin unei drepte *d*, atunci segmentul *AB* este o mulțime finită de puncte. A F

2. Încercuiește litera corespunzătoare răspunsului corect. **3 puncte**

a) **A.** $D_4 \subset D_8$ și $D_8 \subset D_{16}$; **B.** $D_{16} \subset D_8$ și $D_8 \subset D_4$; **C.** $D_4 \subset D_{16}$ și $D_{16} \subset D_8$; **D.** $D_8 \subset D_{16}$ și $D_{16} \subset D_4$.

b) **A.** $M_4 \subset M_8$ și $M_8 \subset M_{16}$; **B.** $M_{16} \subset M_8$ și $M_8 \subset M_4$; **C.** $M_4 \subset M_{16}$ și $M_{16} \subset M_8$; **D.** $M_8 \subset M_{16}$ și $M_{16} \subset M_4$.

3. Completează caseta cu răspunsul corect. **1,5 puncte**

Dintre mulțimile $A = D_{2024}$ și $B = M_4$, finită este mulțimea $\boxed{}$.

Din oficiu: 1 punct

I.1.4. OPERAȚII CU MULȚIMI: REUNIUNE, INTERSECȚIE, DIFERENȚĂ

Rezolvăm împreună

Sorina consideră următoarele două mulțimi:

- mulțimea literelor din care este alcătuit cuvântul *arbore*, notată cu *A*;
- mulțimea literelor din care este alcătuit cuvântul *aerul*, notată cu *B*.

Folosindu-se de elementele celor două mulțimi, Alexandra consideră următoarele trei mulțimi:

- mulțimea *I*, a elementelor comune mulțimilor *A* și *B*;
- mulțimea *R*, a elementelor care aparțin cel puțin uneia dintre mulțimile considerate de Sorina;
- mulțimea *D*, a elementelor care aparțin mulțimii *A* și nu aparțin mulțimii *B*.

a) Scrie mulțimile *A*, *B*, *I*, *R* și *D* prin enumerarea elementelor.

b) Folosind diagrame Venn-Euler, ilustrează mulțimile:

1. *A*, *B* și *I*; **2.** *A*, *B* și *R*; **3.** *A*, *B* și *D*.

Rezolvare:

a) $A = \{a, r, b, o, e\}$, $B = \{a, r, u, l, e\}$. Deoarece *elementele comune* mulțimilor *A* și *B* sunt: *a*, *r* și *e*, rezultă $I = \{a, r, e\}$. Elementele care *aparțin cel puțin uneia dintre mulțimile considerate* de Sorina sunt *a*, *r*, *b*, *o*, *e*, *u*, *l*. Rezultă că $R = \{a, r, b, o, e, u, l\}$.

Elementele care *aparțin mulțimii A și nu aparțin mulțimii B* sunt *b* și *o*. Rezultă că $D = \{b, o\}$.

b) Vezi figurile 1, 2 și 3.

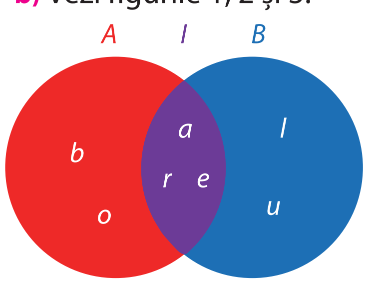


Fig. 1

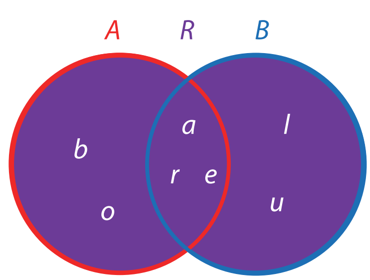


Fig. 2

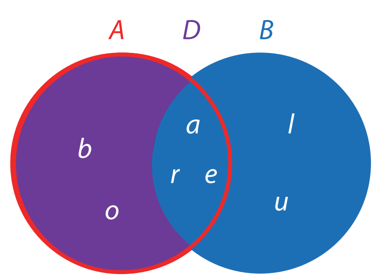


Fig. 3

Observăm și descoperim cunoștințe noi

Rezolvarea exercițiului pune în evidență procedee, numite ***operații cu mulțimi***, prin care din două mulțimi date obținem o nouă mulțime. Astfel:

1) considerând *elementele comune* celor două mulțimi A și B a rezultat mulțimea $I = \{a, r, e\}$, numită *mulțimea A intersectată cu mulțimea B*, pentru care se folosește notația $A \cap B$. Prin urmare, $A \cap B = \{a, r, e\}$;

2) considerând elementele care *aparțin cel puțin uneia dintre cele două mulțimi* a rezultat mulțimea $R = \{a, r, b, o, e, u, l\}$, numită *mulțimea A reunită cu mulțimea B*, pentru care se folosește notația $A \cup B$. Prin urmare, $A \cup B = \{a, r, b, o, e, u, l\}$;

3) considerând *elementele care aparțin mulțimii A și nu aparțin mulțimii B* a rezultat mulțimea $D = \{b, o\}$, numită *mulțimea A minus mulțimea B*, notată $A \setminus B$ sau $A - B$. Deci $A \setminus B = \{b, o\}$.

Reține!

- Prin **operație cu mulțimi** se înțelege procedeul prin care, din orice două mulțimi date, obținem o nouă mulțime.
- Prin operații cu mulțimi, din două mulțimi date A și B rezultă mulțimile:
  - **mulțimea *A* reunită cu mulțimea *B***, notată $A \cup B$;
  - **mulțimea *A* intersectată cu mulțimea *B***, notată $A \cap B$;
  - **mulțimea *A* minus mulțimea *B***, notată $A \setminus B$.
- Operațiile cu mulțimi prin care din două mulțimi oarecare A și B rezultă mulțimile $A \cup B$, $A \cap B$, $A \setminus B$ se numesc: **reuniune**, **intersecție**, respectiv **diferență**.
- $A \cup B$ este mulțimea formată din **elementele care aparțin cel puțin uneia dintre mulțimile *A* sau *B*** (figura 4). Prin urmare:
  - dacă $x \in A \cup B$, atunci $x \in A$ sau $x \in B$;
  - dacă $x \in A$ sau $x \in B$, atunci $x \in A \cup B$.
- $A \cap B$ este mulțimea formată din **elementele comune mulțimilor *A* și *B*** (figura 5). Prin urmare:
  - dacă $x \in A \cap B$, atunci $x \in A$ și $x \in B$;
  - dacă $x \in A$ și $x \in B$, atunci $x \in A \cap B$.
- $A \setminus B$ este mulțimea formată din **elementele care aparțin mulțimii *A* și nu aparțin mulțimii *B*** (figura 6). Prin urmare:
  - dacă $x \in A \setminus B$, atunci $x \in A$ și $x \notin B$;
  - dacă $x \in A$ și $x \notin B$, atunci $x \in A \setminus B$.
- Două mulțimi a căror intersecție este mulțimea vidă se numesc **mulțimi disjuncte**.

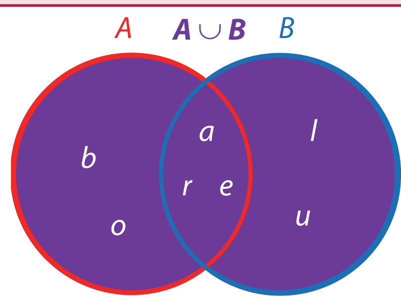


Fig. 4

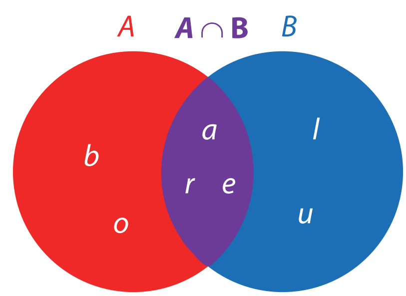


Fig. 5

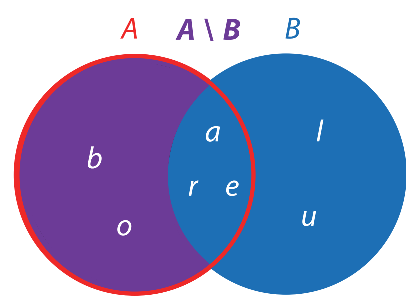


Fig. 6

Aplicăm cunoștințele

$x \in A \cup B \Leftrightarrow x \in A$ sau $x \in B$

$x \in A \cap B \Leftrightarrow x \in A$ și $x \in B$

$x \in A \setminus B \Leftrightarrow x \in A$ și $x \notin B$

1. Fie mulțimile $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ și $B = \{2, 3, 4, 7\}$. Determină mulțimile:
a) $A \cup B$; **b)** $A \cap B$; **c)** $A \setminus B$; **d)** $B \setminus A$.

Rezolvare:

a) Deoarece $A \cup B$ este mulțimea formată din elementele care aparțin cel puțin uneia dintre mulțimile A sau B, rezultă că:
$A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$.

b) Deoarece $A \cap B$ este mulțimea formată din elementele comune mulțimilor A și B, rezultă că $A \cap B = \{2, 3, 4\}$.

c) Deoarece $A \setminus B$ este mulțimea formată din elementele care aparțin mulțimii A și nu aparțin mulțimii B, rezultă că $A \setminus B = \{1, 5, 6\}$.

d) Deoarece $B \setminus A$ este mulțimea formată din elementele care aparțin mulțimii B și nu aparțin mulțimii A, rezultă că $B \setminus A = \{7\}$.

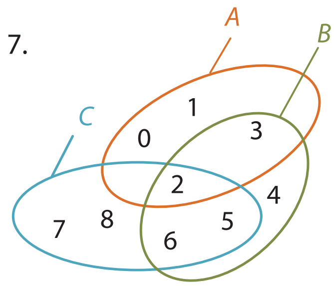


Fig. 7

2. Fie mulțimile A, B și C reprezentate cu ajutorul diagramelor din figura 7.
a) Scrie mulțimile A, B și C prin enumerarea elementelor.
b) Calculează: $A \cup B$, $A \cup C$, $B \cup C$, $A \setminus B$, $A \setminus C$, $B \setminus C$, $A \cup B \cup C$, $A \cap B \cap C$, $(A \cap C) \setminus B$.

Rezolvare:

a) Elementele mulțimii A sunt: 0, 1, 2 și 3. Elementele mulțimii B sunt: 2, 3, 4, 5 și 6. Elementele mulțimii C sunt: 2, 5, 6, 7 și 8.
Deci $A = \{0, 1, 2, 3\}$, $B = \{2, 3, 4, 5, 6\}$ și $C = \{2, 5, 6, 7, 8\}$.

b) Mulțimea $A \cup B$ este mulțimea elementelor care aparțin lui A sau lui B.
Rezultă că: $A \cup B = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, $A \cup C = \{0, 1, 2, 3, 5, 6, 7, 8\}$ și $B \cup C = \{2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$.
Mulțimea $A \setminus B$ este formată din elementele care aparțin lui A și nu aparțin lui B: $A \setminus B = \{0, 1\}$.
Mulțimea $A \setminus C$ este formată din elementele care aparțin lui A și nu aparțin lui C: $A \setminus C = \{0, 1, 3\}$.
Mulțimea $B \setminus C$ este formată din elementele care aparțin lui B și nu aparțin lui C: $B \setminus C = \{3, 4\}$.
Mulțimea $A \cup B \cup C$ este mulțimea elementelor care aparțin lui A *sau* lui B *sau* lui C:
$A \cup B \cup C = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$.
Mulțimea $A \cap B \cap C$ este mulțimea elementelor comune mulțimilor A, B și C: $A \cap B \cap C = \{2\}$.
Pentru a calcula $(A \cap C) \setminus B$ procedăm astfel:

1. Calculăm $A \cap C$.
   Mulțimea $A \cap C$ este mulțimea elementelor care aparțin și lui A și lui C. Deci $A \cap C = \{2\}$.
2. Calculăm $(A \cap C) \setminus B$.
   Mulțimea $(A \cap C) \setminus B$ este mulțimea elementelor care aparțin lui $A \cap C$ și care nu aparțin lui B.
   Deci $(A \cap C) \setminus B = \{2\} \setminus \{2, 3, 4, 5, 6\} = \varnothing$.

Exersează, fixează și aprofundează cunoștințele

1. Răspunde la întrebările următoare.
a) Ce se înțelege prin *operație cu mulțimi*?
b) Fiind date două mulțimi M, N și x un element al mulțimii $M \cup N$, numai una dintre afirmațiile care urmează este adevărată. Care este aceasta?
A. $x \in M$ și $x \in N$; **B.** $x \in M$ sau $x \in N$; **C.** $x \in M$ și $x \notin N$; **D.** $x \notin M$ și $x \in N$.
c) Pentru două mulțimi M și N, dacă $x \in M$ și $x \notin N$ numai una dintre afirmațiile care urmează este adevărată. Care este aceasta?
A. $x \notin M \setminus N$; **B.** $x \in M \setminus N$; **C.** $x \in M \cap N$; **D.** $x \in N \setminus M$.

2. Se consideră următoarele mulțimi de semne grafice: $A = \{+, -, \times, *\}$ și $B = \{°, +, \times, \#, <, \geq\}$. Calculează:
a) $A \cup B$; **b)** $A \cap B$; **c)** $A \setminus B$; **d)** $B \setminus A$.

3. Diagrama din figura 8 reprezintă trei mulțimi: A, B și C. Folosindu-se de diagrama respectivă și de operațiile cu mulțimi, Alexandra, Irina, Sonia și Mihai reprezintă fiecare câte o mulțime, după cum urmează:

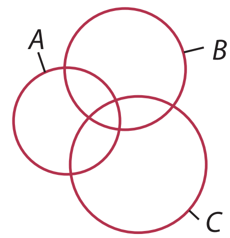
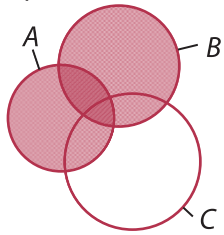
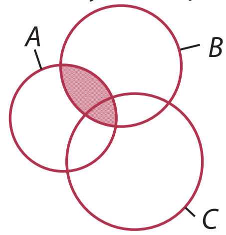


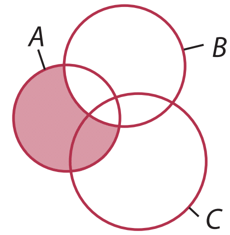
Fig. 8



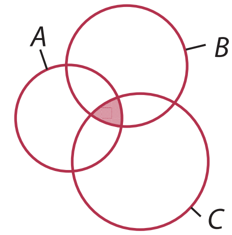
Alexandra



Irina



Sonia



Mihai

Scrie mulțimea reprezentată de:
a) Alexandra; **b)** Irina; **c)** Sonia; **d)** Mihai.

4. Se consideră mulțimile $A = \{1, 2, 4, 8, 16, 32\}$ și $B = \{0, 4, 8, 12, 16, 20, 24\}$.
a) Calculează mulțimile: $A \cup B$, $A \cap B$, $A \setminus B$ și $B \setminus A$.
b) Verifică egalitatea: $\text{card}(A \cup B) = \text{card } A + \text{card } B - \text{card}(A \cap B)$.

5. Cei 25 de elevi ai unei clase au participat la două olimpiade școlare. Se știe că la olimpiada de fizică au participat 15 elevi, iar la olimpiada de matematică au participat 17 elevi. Notăm cu F mulțimea elevilor care au participat la olimpiada de fizică, cu M mulțimea elevilor care au participat la olimpiada de matematică și cu X mulțimea elevilor care au participat la ambele olimpiade școlare.
a) Arată că $F \cap M \neq \varnothing$.
b) Reprezintă cu ajutorul diagramelor Venn-Euler mulțimile: F, M, X și $F \cap M$.
c) Determină numărul elevilor care au participat numai la olimpiada de matematică, numărul elevilor care au participat numai la olimpiada de fizică și numărul elevilor care au participat la ambele olimpiade.

6. Se consideră mulțimile $A = \{1, 2, 4, 7\}$ și $B = \{1, 4, 7, 8, 9\}$. Calculează mulțimile: $A \cup B$, $A \cap B$, $A \setminus B$ și $B \setminus A$, apoi verifică egalitățile:

$$A \cup B = (A \setminus B) \cup (A \cap B) \cup (B \setminus A),\ \text{card}(A \cup B) = \text{card}(A \setminus B) + \text{card}(A \cap B) + \text{card}(B \setminus A).$$

7. Se consideră trei mulțimi: $A = \{1, 5, 7, 10\}$, $B = \{1, 7, 8\}$, $C = \{1, 5, 8, 9\}$.
a) Calculează mulțimile: $B \cup C$, $B \cap C$, $A \setminus B$ și $A \setminus C$.
b) Verifică egalitatea: $A \setminus (B \cup C) = (A \setminus B) \cap (A \setminus C)$.

8. Determină mulțimile A și B, știind că sunt îndeplinite simultan condițiile:
i) $A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$; ii) $A \cap B = \{3, 4, 5\}$; iii) $A \setminus B = \{1, 2\}$.

AUTOEVALUARE

10 min

1. Dacă apreciezi că afirmația este adevărată, încercuiește litera A. În caz contrar, încercuiește litera F. **4,5 puncte**

a) Reuniunea semidreptelor opuse AB și AC este dreapta BC.	**A**	**F**
b) Oricare ar fi două drepte a și b, dacă $a \parallel b$, atunci $a \cap b = \varnothing$.	**A**	**F**
c) Oricare ar fi punctele A și B, intersecția semidreptelor AB și BA este dreapta AB.	**A**	**F**

2. Încercuiește litera corespunzătoare răspunsului corect. **3 puncte**
a) Dacă $x \notin M \cup N$, atunci: **A.** $x \notin M$ sau $x \notin N$; **B.** $x \in M \setminus N$; **C.** $x \in N \cap M$; **D.** $x \notin M$ și $x \notin N$.
b) Dacă $x \notin M$ și $x \in N$, atunci: **A.** $x \notin M \cup N$; **B.** $x \in M \setminus N$; **C.** $x \in N \setminus M$; **D.** $x \in N \cap M$.

3. Completează caseta cu răspunsul corect. **1,5 punct**
Dacă semidreptele AB și AC sunt opuse și dacă punctul M aparține segmentului AB, iar punctul N aparține segmentului AC, atunci intersecția segmentelor MN și AB este $\boxed{}$.

Din oficiu: 1 punct

Exerciții și probleme recapitulative

1. Precizează valoarea de adevăr a propozițiilor:

a) $\{2, 3\} \subset \{7, 5, 2, 4, 3\}$; ☐ **b)** $\varnothing \not\subset \{a, b\}$; ☐

c) $\{1, 4, 3, 7\} \supset \{3\}$; ☐ **d)** $3 \in \{1, 4, 3, 7\}$; ☐

e) $\{2, 4\} \subset M$, unde M este mulțimea cifrelor impare. ☐

2. Reprezintă mulțimile A și B prin enumerarea elementelor și prin diagrame Venn-Euler, știind că elementele celor două mulțimi sunt numere naturale și:

i) $x \in A \Leftrightarrow x \,\vdots\, 5$ și $x < 35$; ii) $x \in B \Leftrightarrow x \mid 24$ și $x < 15$.

3. Fie mulțimile $A = \{2, 3, 5\}$ și $B = \{1, 4, 5\}$. Calculează: $A \cup B$, $A \cap B$, $A \setminus B$ și $B \setminus A$.

4. Fie A și B două mulțimi.

a) Dacă $\text{card}(A \cup B) = 14$, $\text{card } A = 8$, $\text{card } B = 10$, calculează $\text{card}(A \cap B)$.

b) Dacă $\text{card } A = 12$ și $\text{card}(A \setminus B) = 4$, calculează $\text{card}(A \cap B)$.

c) Dacă $B \subset A$, calculează $A \cap B$.

5. Determină mulțimile A și B, știind că sunt îndeplinite simultan condițiile:

i) $A \cup B = \{a, b, c, d, e, f\}$; ii) $A \cap B = \{c, d\}$; iii) $A \cap \{e, f\} = \varnothing$; iv) $\{a, b\} \cap B \neq \varnothing$.

6. Se consideră mulțimea $M = \{a, b, c, d\}$.

a) Scrie toate submulțimile cu câte două elemente ale mulțimii M.

b) Scrie toate submulțimile mulțimii M.

7. Determină $a, b \in \mathbb{N}$, pentru care mulțimile $M = \{11a + 5, b^2\}$ și $N = \{49, 5b + 3\}$ sunt egale.

8. Se notează cu A mulțimea formată din numerele de două cifre divizibile cu 6.

a) Stabilește dacă $84 \in A$. **b)** Scrie cel mai mic și cel mai mare element din mulțimea A.

c) Calculează câte elemente are mulțimea A.

9. Determină numărul natural a, astfel încât reuniunea mulțimilor $M = \{a + 3, 11\}$ și $N = \{2a + 1, 1\}$ să fie formată din trei elemente și calculează: $M \cap N$, $M \setminus N$, $N \setminus M$.

10. Se consideră mulțimea $M = \{a, b, c\}$.

a) Scrie două mulțimi disjuncte a căror reuniune să fie mulțimea M.

b) Scrie toate perechile de mulțimi disjuncte a căror reuniune să fie mulțimea M.

11. Se consideră mulțimea $M = \{3, 5\}$.

a) Scrie două mulțimi a căror intersecție să fie egală cu mulțimea M.

b) Scrie trei mulțimi a căror intersecție să fie egală cu mulțimea M.

c) Scrie două mulțimi a căror diferență să fie egală cu mulțimea M.

12. Calculează cardinalul unei mulțimi M, știind că:

a) elementele sale sunt toate numerele naturale a cu proprietatea că $a < 2^{2022}$;

b) elementele sale sunt toate numerele naturale b cu proprietatea că $2^{2023} < b < 2^{2024}$.

Investigație

Împreună cu colegii din clasa ta, realizați un sondaj în rândul elevilor din școala voastră.
Organizați datele colectate într-un tabel ca cel de mai jos (prima înregistrare este dată ca model).

Prenume elev	Băiat/fată	Vârsta	Clasa	Sporturi preferate
Maria	Fată	13	VIII	Volei, handbal, înot, tenis

- Scrieți mulțimea elevilor de 12 ani care preferă tenisul.
- Scrieți mulțimea fetelor de clasa a V-a care preferă cel puțin două sporturi.
- Scrieți mulțimea băieților de 12 ani care sunt în clasa a VI-a și preferă maximum trei sporturi.

Dați și voi exemple de alte mulțimi de acest fel.

EVALUARE

Timp de lucru: 50 de minute.

Subiectul I. Dacă apreciezi că afirmația este adevărată, completează căsuța alăturată cu litera A. În caz contrar, completează cu litera F.

(5p) **1.** Dacă M este mulțimea numerelor naturale x pentru care $2x + 4 \leq 8$, atunci $M = \{0, 1, 2\}$. ☐

(5p) **2.** Elementele reuniunii a două mulțimi sunt elemente comune celor două mulțimi. ☐

(5p) **3.** Mulțimea vidă este submulțime a oricărei mulțimi. ☐

(5p) **4.** Dacă A este mulțimea numerelor de forma $4n + 2$, unde $n \in \mathbb{N}$, atunci $112 \in A$. ☐

Subiectul II. Dacă A este mulțimea puterilor lui 2 care sunt mai mici decât 60 și B este mulțimea multiplilor lui 4 care sunt mai mici decât 22, unește, prin săgeți, fiecare cifră corespunzătoare enunțurilor din coloana **A** cu litera care indică răspunsul corect, aflat în coloana **B**.

	A	B
(5p)	**1.** $A \cup B =$	**a)** $\{4, 8, 16\}$;
(5p)	**2.** $A \cap B =$	**b)** $\{0, 1, 2, 4, 8, 12, 16, 20, 32\}$;
(5p)	**3.** $A \setminus B =$	**c)** $\{0, 12, 20\}$;
(5p)	**4.** $B \setminus A =$	**d)** $\{1, 2, 32\}$;
		e) $\{1, 2, 4, 8, 16\}$.

Subiectul III. Se consideră două mulțimi A și B. Se știe că $A = \{1, 2, 4\}$ și că orice element din mulțimea B este pătratul unui element din mulțimea A. Pentru cerințele care urmează, alege litera care indică singura variantă corectă.

(5p) **1.** Mulțimea B este egală cu:

A. $\{1, 2, 16\}$; **B.** $\{1, 4, 16\}$; **C.** $\{1, 4\}$; **D.** $\{1, 8, 16\}$.

(5p) **2.** Numărul submulțimilor mulțimii A este egal cu:

A. 8; **B.** 10; **C.** 12; **D.** 6.

(5p) **3.** Mulțimea $A \cap B$ este egală cu:

A. $\{1, 8\}$; **B.** $\{1, 2, 4, 16\}$; **C.** $\{1, 4\}$; **D.** $\{1, 16\}$.

(5p) **4.** Numărul x pentru care $B \subset A \cup \{x\}$ este egal cu:

A. 1; **B.** 4; **C.** 8; **D.** 16.

La subiectele IV și V scrie rezolvările complete.

Subiectul IV. Fie mulțimile $A = \{1, 2, 3, 4\}$ și $B = \{3, 4, 5, 6\}$.

(5p) **a)** Scrie submulțimile lui A care sunt submulțimi ale lui B.

(5p) **b)** Scrie submulțimile nevide ale mulțimii $B \setminus A$.

(5p) **c)** Verifică egalitățile $A \cap (B \cup A) = A$ și $B \cup (A \cap B) = B$.

Subiectul V. Din cei 25 de elevi ai unei clase, 13 au media maximă la română, iar 15 au media maximă la matematică. Calculează:

(5p) **a)** numărul elevilor care au medii maxime la ambele materii;

(5p) **b)** numărul elevilor care au medii maxime doar la română;

(5p) **c)** numărul elevilor care au medii maxime doar la matematică.

Se acordă 10 puncte din oficiu. Nota se obține împărțind punctajul final la 10.

Subiectul	I.1	I.2	I.3	I.4	II.1	II.2	II.3	II.4	III.1	III.2	III.3	III.4	IV.a	IV.b	IV.c	V.a	V.b	V.c
Punctajul																		
Nota																		

I.2. DIVIZIBILITATEA NUMERELOR NATURALE

I.2.1. DESCOMPUNEREA NUMERELOR NATURALE ÎN PRODUS DE PUTERI DE NUMERE PRIME

Ne amintim

- Determină câtul și restul împărțirii numărului $a = 317$ la numărul $b = 15$, apoi scrie relația dintre deîmpărțitul, împărțitorul, câtul și restul acestei împărțiri.

Rezolvare: Numărul $a = 317$ este *deîmpărțitul*, iar numărul $b = 15$ este *împărțitorul*. Efectuăm împărțirea, parcurgând etapele învățate în clasa a V-a.

Câtul împărțirii numărului $a = 317$ la numărul $b = 15$ este numărul $c = 21$, iar *restul* împărțirii este numărul $r = 2$. Atunci $317 = 15 \cdot 21 + 2$ și $2 < 15$ sau $a = b \cdot c + r$ și $r < b$.

deîmpărțit		
3 1 7	1 5	împărțitor
3 0	2 1	cât
= 1 7		
1 5		
= 2		rest

- **Teorema împărțirii cu rest**

▪ Oricare ar fi numărul natural a și oricare ar fi numărul natural nenul b, există numerele naturale q și r, unic determinate, astfel încât $a = b \cdot q + r$ și $r < b$.

▪ Dacă $r = 0$, atunci $a = b \cdot q$. În acest caz se spune că:
- *a este un multiplu al lui b*;
- *a este divizibil cu b* (se scrie $a \,\vdots\, b$);
- *b este un divizor al lui a*;
- *b divide a* (se scrie $b \mid a$).

Exemplu: Împărțind numărul 315 la 7 rezultă câtul 45 și restul 0. Rezultă că $315 = 7 \cdot 45$ și spunem că:
- 315 *este un multiplu al lui* 7;
- 315 *este divizibil cu* 7 ($315 \,\vdots\, 7$);
- 7 *este un divizor al lui* 315;
- 7 *divide* 315 ($7 \mid 315$).

- **Enunță și exemplifică criteriile de divizibilitate cu: 2, 3, 5, 9, 10.**
- **Enunță și exemplifică noțiunile de număr prim și număr compus.**

Rezolvăm împreună

Arată că numărul 252 se scrie ca un produs de puteri de numere prime.

Rezolvare:

$252 : 2 = 126$		$252 = 2 \cdot 126$
$126 : 2 = 63$	$\longrightarrow$	$126 = 2 \cdot 63$
	$\longrightarrow$	$\boxed{252 = 2 \cdot 2 \cdot 63}$
$63 : 3 = 21$	$\longrightarrow$	$63 = 3 \cdot 21$
	$\longrightarrow$	$\boxed{252 = 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 21}$
$21 : 3 = 7$	$\longrightarrow$	$21 = 3 \cdot 7$
	$\longrightarrow$	$\boxed{252 = 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 7}$
$7 : 7 = 1$		

Rezultă că $252 = 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 7 = 2^2 \cdot 3^2 \cdot 7$. Deci 252 este un produs de puteri de numere prime.

Observăm și descoperim cunoștințe noi

Numărul 252 este divizibil cu numărul prim 2.
Se împarte 252 la numărul prim 2. Rezultă câtul 126.
Câtul 126 se împarte la următorul număr prim cu care acesta este divizibil și așa mai departe, până când câtul împărțirii devine 1.
În general, calculele se organizează conform modelului prezentat în coloana colorată.

252	2	⟵ $252 \,\vdots\, 2$
126	2	⟵ $126 \,\vdots\, 2$
63	3	⟵ $63 \,\vdots\, 3$
21	3	⟵ $21 \,\vdots\, 3$
7	7	⟵ $7 \,\vdots\, 7$
1		

$252 = 2^2 \cdot 3^2 \cdot 7$

Reține!

- **Orice număr natural compus poate fi scris ca un produs de puteri de numere prime.**
- Prin **descompunerea în factori primi** a unui număr natural se înțelege scrierea numărului respectiv ca un produs de puteri de numere prime.
- Metoda prin care un număr natural se scrie ca un produs de puteri de numere prime este numită și ***algoritmul de descompunere a numerelor în factori primi***.

Aplicăm cunoștințele

Arată că numărul 311 este prim.

Rezolvare: Pentru a arăta că numărul 311 este prim trebuie să arătăm că 311 nu are divizori proprii. Conform criteriilor de divizibilitate, observăm că acest număr nu este divizibil cu niciunul dintre numerele prime 2, 3 sau 5.
Verificăm dacă numărul 311 are ca divizori vreunul dintre numerele prime 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, ... Pentru aceasta, îl împărțim pe 311 la aceste numere.

311 ∣ 7 ⟵ *î*	311 ∣ 11 ⟵ *î*	311 ∣ 13 ⟵ *î*	311 ∣ 17 ⟵ *î*	311 ∣ 19 ⟵ *î*
28 ∣ 44 ⟵ *c*	22 ∣ 28 ⟵ *c*	26 ∣ 23 ⟵ *c*	17 ∣ 18 ⟵ *c*	19 ∣ 16 ⟵ *c*
=31 $c > î$	=91 $c > î$	=51 $c > î$	141 $c > î$	121 $c < î$
28	88	39	136	114
=3	=3	12	==5	==7
$311 = 7 \cdot 44 + 3$	$311 = 11 \cdot 28 + 3$	$311 = 13 \cdot 23 + 12$	$311 = 17 \cdot 18 + 5$	$311 = 19 \cdot 16 + 7$

Efectuând împărțirile, observăm că de fiecare dată restul împărțirii este nenul și, ca urmare, niciunul dintre numerele prime mai mici sau egale cu 19 nu este divizor al numărului 311.
Comparăm de fiecare dată *câtul* (notat cu *c*) cu *împărțitorul* (notat cu *î*). Împărțind pe 311 succesiv la numerele prime 7, 11, 13 și 17, de fiecare dată obținem câtul mai mare decât împărțitorul. Împărțind pe 311 la următorul număr prim, care este 19, rezultă *câtul mai mic decât împărțitorul*.
Considerăm un număr prim p, $p > 19$ și admitem că $p \mid 311$. Rezultă că $311 = p \cdot n$, $n \in \mathbb{N}$. Deoarece $p > 19$, rezultă că $n < 17$ (în caz contrar, am avea $n \geq 17$ și atunci $p \cdot n > 19 \cdot 17$, adică $311 > 323$, ceea ce este absurd). Dacă n nu este prim, îl descompunem în factori primi. Atunci, deoarece $311 = p \cdot n$ și $n < 17$, rezultă că descompunerea lui 311 conține factori primi mai mici decât 17. Acest fapt este absurd deoarece, conform rezultatelor anterioare, 311 nu este divizibil cu niciunul dintre numerele prime mai mici sau egale cu 19. Prin urmare, dacă p este prim și $p > 19$, atunci $p \nmid 311$.
În concluzie, numărul 311 este prim.

Exersează, fixează și aprofundează cunoștințele

1. Răspunde la următoarele întrebări:

a) Este numărul 182 un *multiplu* al numărului 13? Justifică răspunsul.

b) Este numărul 156 *divizibil* cu 52? Justifică răspunsul.

c) Este numărul 13 un *divizor* al numărului 91? Justifică răspunsul.

d) Numărul 7 *divide* numărul 161? Justifică răspunsul.

2. a) Scrie criteriile de divizibilitate cu: 2, 3, 5, 9 și 10.

b) Dintre numerele 2, 3, 5, 9 și 10 scrie-le pe acelea care sunt divizori ai numărului 2520.

c) Scrie mulțimea divizorilor numărului 30 și mulțimea divizorilor numărului 42. Care sunt divizorii comuni ai numerelor 30 și 42?

d) Scrie mulțimea multiplilor lui 4 și mulțimea multiplilor lui 6. Care este mulțimea multiplilor comuni ai numerelor 4 și 6?

e) Scrie trei numere prime și trei numere compuse.

3. Cutia din imaginea alăturată beneficiază de o încuietoare cu cifru. Pentru deschiderea ei se formează un număr, notat cu N, din patru cifre. Se știe că:

- $N \in \{6240, 4365, 2535, 7836\}$;
- N este un multiplu al lui 5;
- 2 nu este un divizor al lui N;
- $N \vdots 3$ și N nu este divizibil cu 9.

Determină numărul N.

4. Descompune în factori primi numerele: 48, 56, 72, 189, 276, 288, 1800, 3675.

5. a) Știind că dintre numerele 439230, 688128, 737280 și 1260525 unul singur are în descompunerea sa numerele prime 2, 3, 5 și nu este divizibil cu 9, fără a efectua împărțiri, identifică acest număr.

b) Arată că numărul identificat la punctul precedent este divizibil cu 11.

6. Activitate în perechi

a) Aplicați criteriile de divizibilitate sau eventual efectuați împărțiri și arătați că numărul 143 este compus.

b) Aplicați criteriile de divizibilitate sau eventual efectuați împărțiri și arătați că numărul 211 este prim.

7. Determină numerele prime a, b și c, știind că:

a) $3a + 2b + 10c = 86$; **b)** $a + 2b + 4c = 36$; **c)** $3a + 4b + 2c = 40$.

8. Fie a și b două numere prime, iar x și y două numere naturale.

a) Scrie divizorii numărului a^x. Câți divizori ai găsit?

b) Scrie divizorii numărului $a^x b$. Câți divizori ai găsit?

c) Scrie divizorii numărului $a^x b^y$. Câți divizori ai găsit?

d) Care este numărul de divizori ai numărului care are descompunerea în factori primi $a^x b^y c^z$?

Portofoliu

Numerele prietene sau amiabile sunt perechile de numere în care fiecare număr în parte este egal cu suma divizorilor (toți divizorii proprii și 1) celuilalt număr.

Prima pereche de numere amiabile este (220, 284):

- divizorii lui 220 sunt 1, 2, 4, 5, 10, 11, 20, 22, 44, 55 și 110, iar suma acestora este 284;
- divizorii lui 284 sunt 1, 2, 4, 71 și 142, iar suma acestora este 220.

Găsește și tu astfel de perechi de numere, îmbogățindu-ți portofoliul personal cu un referat pe această temă.

AUTOEVALUARE

10 min

1. Încercuiește litera corespunzătoare răspunsului corect. **3 puncte**

a) Dintre numerele 7260, 2520, 756 și 8550 este divizibil cu 2, cu 3, cu 5 și nu este divizibil cu 9 numărul:

A. 7260; B. 2520; C. 756; D. 8550.

b) Dintre numerele 91, 103, 143, 187 se știe că unul singur este număr prim. Acesta este numărul:

A. 91; B. 103; C. 143; D. 187.

2. Unește, prin săgeți, fiecare enunț aflat în coloana din stânga cu răspunsul corespunzător aflat în coloana din dreapta. **4,5 puncte**

a) 72 = ...	1) $2^2 \cdot 3^2 \cdot 5$;
b) 180 = ...	2) $3^3 \cdot 5$;
c) 135 = ...	3) $2^3 \cdot 3^2$;
	4) $2^2 \cdot 3 \cdot 5$.

3. Completează caseta cu răspunsul corect. **1,5 puncte**

Cel mai mic număr natural n, pentru care numărul $p = n^2 + n + 11$ este compus, este egal cu $\boxed{}$.

Din oficiu: 1 punct

I.2.2. Determinarea celui mai mare divizor comun și a celui mai mic multiplu comun. Numere prime între ele

Rezolvăm împreună

72	2
36	2
18	2
9	3
3	3
1	

$72 = 2^3 \cdot 3^2$

240	2 · 5
24	2
12	2
6	2
3	3
1	

$240 = 2^4 \cdot 3 \cdot 5$

a) Descompune în factori primi numărul 72.
b) Descompune în factori primi numărul 240.
c) Scrie trei divizori comuni ai numerelor 72 și 240.
d) Arată că dacă d este divizor comun al numerelor 72 și 240, atunci d este de forma $2^m \cdot 3^n$, unde $m, n \in \mathbb{N}$.
e) Determină cel mai mare divizor comun al numerelor 72 și 240.

Rezolvare:

a) Descompunem în factori primi numărul 72 și găsim $72 = 2^3 \cdot 3^2$.

b) Descompunem în factori primi numărul 240 și găsim $240 = 2^4 \cdot 3 \cdot 5$.

c) Observăm că 3, 4, 6 sunt divizori comuni ai numerelor 72 și 240, pentru că $3 \mid 72$ și $3 \mid 240$, $4 \mid 72$ și $4 \mid 240$, respectiv $6 \mid 72$ și $6 \mid 240$.

d) Descompunerea numerelor 72 și 240 în factori primi arată că numerele prime din descompunerea acestora sunt 2, 3 și 5. Dacă d este divizor comun, atunci numerele 72 și 240 sunt multipli ai lui d, adică $72 = d \cdot a$ și $240 = d \cdot b$ ($a, b \in \mathbb{N}$). Aceste două egalități arată că descompunerea lui d nu poate conține alți factori primi diferiți de 2 și 3. De exemplu, 5 nu se află în descompunerea lui d pentru că atunci s-ar afla în descompunerea lui 72, dar și în descompunerea lui 240, ceea ce este fals. Deoarece descompunerea lui d nu poate conține alți factori primi diferiți de 2 și 3, rezultă că $d = 2^m \cdot 3^n$ ($m, n \in \mathbb{N}$).

e) Din faptul că $72 = 2^3 \cdot 3^2$, $240 = 2^4 \cdot 3 \cdot 5$ și $d = 2^m \cdot 3^n$ este un divizor comun al numerelor 72 și 240, rezultă că $m \in \{0, 1, 2, 3\}$ și $n \in \{0, 1\}$. Într-adevăr, dacă $m \geq 4$ atunci 2^m nu se află în descompunerea numărului 72, iar dacă $n \geq 2$, atunci 3^n nu se află în descompunerea lui 240, deci nu poate fi divizor comun al numerelor 72 și 240. Cel mai mare divizor comun al numerelor 72 și 240 se obține pentru valorile cele mai mari pe care le pot lua numerele m și n, adică pentru $m = 3$ și $n = 1$. Prin urmare, pentru $m = 3$ și $n = 1$, rezultă $d = 2^3 \cdot 3 = 24$ și 24 este cel mai mare divizor comun al numerelor 72 și 240.

Observăm și descoperim cunoștințe noi

Din rezolvarea anterioară rezultă că *d* este *cel mai mare divizor comun* (c.m.m.d.c.) al numerelor *a* și *b* dacă:

• *d* este un *divizor comun* al numerelor *a* și *b*, adică descompunerea lui *d* este un produs de factori primi care sunt comuni descompunerilor numerelor *a* și *b*;

• *d* este *cel mai mare divizor comun* al numerelor *a* și *b*, adică descompunerea lui *d* este produsul factorilor primi comuni descompunerilor numerelor *a* și *b* în factori primi, luați o singură dată, la puterea cea mai mică.

Reține!

- Orice două numere naturale au cel puțin un divizor comun și acesta este 1.
- Dacă două numere naturale au un singur divizor comun, atunci cele două numere se numesc **numere prime între ele**.
- Dacă *a* și *b* sunt două numere naturale, atunci **cel mai mare divizor comun** al lor se notează cu **(a, b)**.
- **Cum se calculează c.m.m.d.c. a două numere?**

– se descompun numerele în produse de puteri de numere prime;

– c.m.m.d.c. este produsul factorilor comuni din cele două descompuneri, luați o singură dată, la puterea cea mai mică.

- Dacă *d* este cel mai mare divizor comun a două numere *a* și *b*, atunci mulțimea divizorilor comuni numerelor *a* și *b* este egală cu mulțimea divizorilor lui *d*, adică: $D_a \cap D_b = D_d$.

- Numărul 0 este multiplul oricărui număr natural.
- Dacă *a* și *b* sunt două numere naturale, atunci produsul lor, $p = a \cdot b$, este un multiplu comun al numerelor *a* și *b*.
- Dacă *a* și *b* sunt două numere naturale, **cel mai mic multiplu comun** al lor, nenul, se notează cu **$[a, b]$**.
- **Cum se calculează c.m.m.m.c. a două numere?**

– se descompun numerele în produse de puteri de numere prime;

– c.m.m.m.c. este produsul factorilor comuni și necomuni din cele două descompuneri, luați o singură dată la puterea cea mai mare.

- Oricare ar fi *a* și *b* două numere naturale, este adevărată relația: $\boldsymbol{a \cdot b = (a, b) \cdot [a, b]}$.
- Dacă *m* este c.m.m.m.c. a două numere *a* și *b*, atunci mulțimea multiplilor comuni numerelor *a* și *b* este egală cu mulțimea multiplilor lui *m*, adică: $M_a \cap M_b = M_m$.

Aplicăm cunoștințele

Dacă muncitorii unui șantier ar fi repartizați în echipe de câte 8, 12 sau 15 muncitori, trei dintre aceștia ar rămâne, de fiecare dată, nerepartizați. Calculează numărul de muncitori de care dispune șantierul, știind că numărul lor este mai mare decât 15 și mai mic decât 240.

Rezolvare: Notăm cu *n* numărul de muncitori din șantier. Conform enunțului, $15 < n < 240$. Dacă am forma echipe de câte 8 muncitori, am avea *a* echipe și încă 3 muncitori. Atunci $n = 8 \cdot a + 3$, de unde $n - 3 = 8 \cdot a$.
Analog, $n - 3 = 12 \cdot b$ și $n - 3 = 15 \cdot c$. Rezultă că $n - 3$ este multiplu de 8, de 12 și de 15. Prin urmare, $n - 3$ este un multiplu comun al numerelor 8, 12 și 15. Dar $[8, 12, 15] = [2^3, 2^2 \cdot 3, 3 \cdot 5] = 2^3 \cdot 3 \cdot 5 = 120$, iar mulțimea multiplilor comuni numerelor 8, 12 și 15 este $M_{120} = \{0, 120, 240, 360, \ldots\}$. Rezultă că $n - 3 \in M_{120}$, adică $n - 3 \in \{0, 120, 240, 360, \ldots\}$, de unde $n \in \{3, 123, 243, 363, \ldots\}$. Deoarece $15 < n < 240$, rezultă că $n = 123$. Prin urmare, șantierul dispune de 123 de muncitori.

Exersează, fixează și aprofundează cunoștințele

1. **a)** Scrie mulțimea divizorilor comuni ai numerelor naturale a și b, dacă $(a, b) = 5^2 \cdot 3$.
b) Scrie mulțimea multiplilor comuni ai numerelor naturale a și b, dacă $[a, b] = 12$.
c) Dacă produsul a două numere este egal cu 240 și cel mai mare divizor comun al lor este egal cu 4, determină cel mai mic multiplu comun al celor două numere.

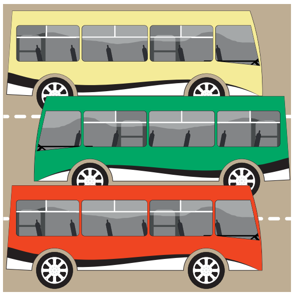
2. **Activitate în perechi**
a) Descompuneți numerele 1080 și 8100 în factori primi.
b) Calculați c.m.m.d.c. și c.m.m.m.c. ale numerelor 1080 și 8100.

3. Calculează c.m.m.d.c. și c.m.m.m.c. ale numerelor:
a) 48 și 144; **b)** 1617 și 693; **c)** 1890 și 2268; **d)** 372, 360 și 900.

4. Determină numerele a, b, x și y, știind că:
a) $(a, b) = 48$ și $[a, b] = 144$; **b)** $(x, y) = 18$ și $x + y = 324$.

5. Determină c.m.m.m.c. al numerelor:
$a = 14 \cdot 81^{12} + 21 \cdot 9^{24}$ și $b = 7 \cdot 27^{15} + 14 \cdot 3^{45}$.

6. Trei autobuze pleacă în același timp dintr-o stație. Unul revine în stație din două în două ore, al doilea din trei în trei ore, iar al treilea din cinci în cinci ore. După câte ore se întâlnesc din nou în stație cele trei autobuze?



7. Determină cel mai mic număr natural n care împărțit la 8, la 12 și la 15 dă de fiecare dată restul 5.

8. Împărțind numerele 2438, 1553 și 1116 la același număr natural n se obțin resturile 7, 6 și, respectiv, 11. Determină numărul la care au fost împărțite.

9. Determină numerele naturale cuprinse între 300 și 800 care împărțite la 5 dau restul 4, împărțite la 7 dau restul 6 și împărțite la 8 dau restul 7.

AUTOEVALUARE

10 min

1. Dacă apreciezi că afirmația este adevărată, încercuiește litera A. În caz contrar, încercuiește litera F. **3 puncte**

a) $6 \cdot n + 1$ este număr prim pentru orice număr natural nenul n. **A F**
b) Produsul a două numere consecutive este totdeauna număr par. **A F**
c) Numerele 4 și 9 sunt numere prime între ele. **A F**

2. Unește, prin săgeți, fiecare enunț aflat în coloana din stânga cu răspunsul corespunzător aflat în coloana din dreapta. **4,5 puncte**

a) $(24, 32) = ...$	**1)** 1;
b) $[2 \cdot 3^2, 2^2 \cdot 3, 2 \cdot 3^3] = ...$	**2)** 108;
c) Pentru orice $x \in \mathbb{N}^*$, $(x + 1, x + 2) = ...$	**3)** 8;
	4) 2.

3. Completează caseta cu răspunsul corect. **1,5 puncte**
Cardinalul mulțimii divizorilor comuni numerelor 648 și 1296 este egal cu ☐.

Din oficiu: 1 punct

I.2.3. Proprietăți ale divizibilității în mulțimea numerelor naturale

Observăm și descoperim cunoștințe noi

Conținuturile matematice pe care le-am studiat până acum ne permit să constatăm că *matematica este o știință deductivă*, deoarece pe baza cunoștințelor anterioare putem formula noi afirmații, pe care le justificăm folosind judecata sau prin care introducem noțiuni noi.

Exemplu: Considerăm următoarele afirmații, pe care le notăm cu p, q, r și s.

p: „Numărul natural a este divizibil cu numărul natural nenul b."

q: „Restul împărțirii numărului natural a la numărul natural nenul b este egal cu 0."

r: „Numărul natural n este divizibil cu 6."

s: „Numărul natural n este divizibil cu 2."

Cu ajutorul afirmațiilor p și q, pe mulțimea $\mathbb{N}$ a numerelor naturale se introduce o *noțiune nouă*, numită ***relație de divizibilitate***. Afirmațiile p și q transmit aceeași informație, faptul că există un număr natural c astfel încât: $a = b \cdot c$. Din acest motiv, afirmațiile p și q sunt *echivalente* (pot fi înlocuite una cu cealaltă).

Deoarece nu este precizat numărul natural n, despre afirmația r sau despre afirmația s nu putem spune nici că sunt adevărate, nici că sunt false.

Considerăm acum afirmația „**dacă** numărul natural n este divizibil cu 6, **atunci** numărul natural n este divizibil cu 2". Această afirmație este adevărată. Vom arăta că afirmația este adevărată folosind cunoștințele anterioare și judecata. Într-adevăr, deoarece numărul natural n este divizibil cu 6, rezultă că există un număr natural c astfel încât $n = 6 \cdot c$, de unde $n = 2 \cdot (3 \cdot c)$. Dacă există c număr natural, atunci $3 \cdot c$ este număr natural și relația $n = 2 \cdot (3 \cdot c)$ arată că numărul natural n este divizibil cu 2.

Se spune că șirul de *judecăți* (*raționamente*) prin care am arătat că numărul natural n este divizibil cu 2 este o *demonstrație*. Astfel, dacă n este un număr natural pentru care afirmația r este adevărată, prin demonstrație rezultă că pentru acel număr natural n este adevărată afirmația s.

scriem	citim
$r \Rightarrow s$	**dacă** *r*, **atunci** *s* sau **din** *r* **rezultă** *s* sau *r* **implică** *s*

Afirmația demonstrată anterior se poate scrie astfel: „Dacă un număr natural n este divizibil cu 6, atunci numărul natural n este divizibil și cu 2 (2 fiind un divizor al lui 6)". Asemănător se poate arăta că dacă un număr natural n este divizibil cu 6, atunci numărul natural n este divizibil și cu 3.

În matematică, afirmațiile care sunt adevărate și se pot demonstra și care au un rol foarte important în demonstrarea altor adevăruri se numesc *teoreme*. Teoremele pun în evidență proprietăți importante ale noțiunilor matematice.

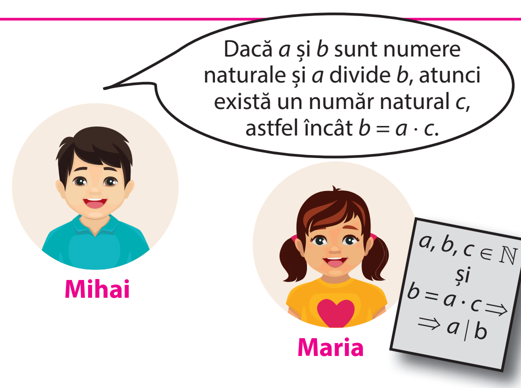
Rezolvăm împreună

1. Citește afirmația făcută de Mihai și pe cea scrisă de Maria pe foaie, apoi rezolvă cerințele.

a) Cum va scrie Maria în caiet afirmația făcută de Mihai?

b) Cum va rosti Mihai afirmația scrisă de Maria?

c) Justifică afirmația făcută de Mihai și pe cea scrisă de Maria.



Rezolvare:

a) Mihai a rostit: „Dacă a și b sunt numere naturale și a divide b, atunci există un număr natural c, astfel încât $b = a \cdot c$."	Maria va scrie: $a, b \in \mathbb{N}$ și $a \mid b \Rightarrow$ există $c \in \mathbb{N}$, astfel încât $b = a \cdot c$.
b) Maria a scris: $a, b, c \in \mathbb{N}$ și $b = a \cdot c \Rightarrow a \mid b$.	Mihai va rosti: „Dacă a, b, c sunt numere naturale și $b = a \cdot c$, atunci a divide b.

c) Afirmațiile făcute de Mihai și scrise de Maria sunt justificate de definiția relației de divizibilitate.

2. Demonstrează că: **a)** $a, b, c \in \mathbb{N}$, $a \mid b$ și $b \mid c \Rightarrow a \mid c$; **b)** $a, b \in \mathbb{N}^*$, $a \mid b$ și $b \mid a \Rightarrow a = b$.

Demonstrație:

a) $a \mid b \overset{\text{def.}}{\Rightarrow}$ există $p \in \mathbb{N}$, astfel încât $b = a \cdot p$;

$b \mid c \overset{\text{def.}}{\Rightarrow}$ există $q \in \mathbb{N}$, astfel încât $c = b \cdot q$.

Din cele două egalități rezultă:

$c = (a \cdot p) \cdot q = a \cdot (p \cdot q) = a \cdot r$, unde $r = p \cdot q$;

$c = a \cdot r$ și $r \in \mathbb{N} \overset{\text{def.}}{\Rightarrow} a \mid c$.

b) $a \mid b \overset{\text{def.}}{\Rightarrow}$ există $p \in \mathbb{N}$, astfel încât $b = a \cdot p$;

$b \mid a \overset{\text{def.}}{\Rightarrow}$ există $q \in \mathbb{N}$, astfel încât $a = b \cdot q$.

Din cele două egalități rezultă:

$b = a \cdot p = (b \cdot q) \cdot p$, de unde $b = b \cdot (q \cdot p)$.

Din ultima egalitate, prin împărțire la b se obține $1 = p \cdot q$. Rezultă că $p = 1$, $q = 1$ și $a = b$.

Reține!

• **Definiția relației de divizibilitate** pe mulțimea numerelor naturale:

$$a \mid b \overset{\text{def.}}{\Leftrightarrow} \text{există } c \in \mathbb{N}, \text{ astfel încât } b = a \cdot c.$$

• **Relația de divizibilitate** definită pe mulțimea numerelor naturale are următoarele **proprietăți**:

1. $1 \mid a$, oricare ar fi $a \in \mathbb{N}$;

2. reflexivitatea: $a \mid a$, oricare ar fi $a \in \mathbb{N}$;

3. tranzitivitatea: $a \mid b$ și $b \mid c \Rightarrow a \mid c$, unde $a, b, c \in \mathbb{N}$;

4. antisimetria: $a \mid b$ și $b \mid a \Rightarrow a = b$, unde $a, b \in \mathbb{N}$;

5. dacă a divide două numere naturale b și c, atunci a divide suma și diferența lor: $a \mid b$ și $a \mid c \Rightarrow a \mid (b + c)$ și $a \mid (b - c)$, unde $a, b, c \in \mathbb{N}$;

6. dacă a divide unul din factorii unui produs de numere naturale, atunci a divide produsul: $a \mid b$ sau $a \mid c \Rightarrow a \mid (b \cdot c)$, unde $a, b, c \in \mathbb{N}$;

7. dacă un număr divide produsul a două numere naturale și este prim cu unul dintre factorii produsului, atunci numărul respectiv divide celălalt factor al produsului: $a \mid b \cdot c$ și $(a, c) = 1 \Rightarrow a \mid b$.

• Divizorii 1 și a ai numărului natural a se numesc **divizori improprii**.

• Divizorii numărului natural a, diferiți de 1 și de a, în cazul în care există, se numesc **divizori proprii**.

Aplicăm cunoștințele

Demonstrează că nu există niciun număr natural x cu proprietățile: $x \mid 245$ și $3 \mid x$.

Demonstrație:

Etapa 1. Presupunem că *există un număr natural x cu proprietățile: $x \mid 245$ și $3 \mid x$.*

Etapa 2. $x \mid 245 \overset{\text{def.}}{\Rightarrow}$ există $p \in \mathbb{N}$, astfel încât $245 = x \cdot p$; $3 \mid x \overset{\text{def.}}{\Rightarrow}$ există $q \in \mathbb{N}$, astfel încât $x = 3 \cdot q$. Din egalitățile $245 = x \cdot p$ și $x = 3 \cdot q$ rezultă că $245 = (3 \cdot q) \cdot p = 3 \cdot (q \cdot p) = 3 \cdot r$, unde $r = q \cdot p$ și $r \in \mathbb{N}$. Prin urmare, există $r \in \mathbb{N}$, astfel încât $245 = 3 \cdot r$. Conform definiției relației de divizibilitate, rezultă că $3 \mid 245$. Aplicând criteriul de divizibilitate cu 3 rezultă că $3 \mid (2 + 4 + 5)$, adică $3 \mid 11$, ceea ce este absurd.

Etapa 3. Aceasta înseamnă că presupunerea făcută la etapa 1 (*există un număr natural x cu proprietățile $x \mid 245$ și $3 \mid x$*) este falsă. Deci *nu există niciun număr natural x cu proprietățile date.*

Observație. Acest tip de demonstrație este cunoscut sub denumirea de demonstrație prin reducere la absurd.

Demonstrația prin reducere la absurd se face parcurgând următoarele etape:

1. *se presupune că nu este adevărat ceea ce se cere a fi demonstrat (dovedit, justificat);*
2. folosind cunoștințele anterioare și raționamentul logic, *se ajunge la ceva fals, absurd*;
3. *se finalizează demonstrația*, menționând: „Aceasta înseamnă că presupunerea făcută este falsă, deci este adevărat ceea ce se cere a fi demonstrat".

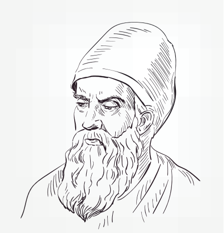
Știai că...

În anul 300 î.Hr. Euclid a demonstrat prin reducere la absurd că există o infinitate de numere prime. Iată demonstrația:

Euclid a presupus prin reducere la absurd că mulțimea numerelor prime este finită și a notat cu p cel mai mare număr prim al acestei mulțimi. Scrise în ordine crescătoare, elementele acestei mulțimi sunt: 2, 3, 5, 7, 11, 13, ..., p. Atunci numărul:

$$n = 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 13 \cdot ... \cdot p + 1$$

nu se divide cu niciunul din numerele 2, 3, 5, ..., p. Rezultă că n sau este prim, sau are un divizor prim mai mare ca p, ceea ce este absurd, deoarece contrazice presupunerea că p ar fi cel mai mare număr prim.



Euclid
(323-283 î.Hr.)

Euclid, numit și Euclid din Alexandria, a fost un matematician grec care a trăit și a predat în Alexandria, Egipt, în timpul domniei lui Ptolemeu I (323-283 î.Hr.).

Exersează, fixează și aprofundează cunoștințele

1. Răspunde la întrebările următoare:

a) Cum se definește relația de divizibilitate pe mulțimea numerelor naturale?

b) Care sunt proprietățile relației de divizibilitate pe mulțimea numerelor naturale?

2. Se consideră numerele $s = 7152 + 324 + 752$, $r = 21654 - 627 - 1173$ și $p = 24 \cdot 75 \cdot 313$. Fără a calcula s, r și p, demonstrează că următoarele afirmații sunt adevărate:

a) numărul s este divizibil cu 2;

b) numărul r este divizibil cu 3;

c) numărul p este divizibil cu 5.

3. Activitate în perechi

Scrieți o sumă formată din trei termeni:

a) astfel încât suma să nu fie divizibilă cu 4, dar doi dintre termenii sumei să fie multipli ai numărului 4;

b) astfel încât suma să fie divizibilă cu 7, unul dintre termeni să fie divizibil cu 7, iar ceilalți doi termeni să nu fie divizibili cu 7.

4. Demonstrează că:

a) $11 \mid (2^{104} + 2^{103} - 2^{101})$;

b) $5 \mid 2^{n+3} - 2^{n+1} - 2^{n}$, unde $n \in \mathbb{N}$;

c) $7 \mid 11 \cdot 5^{n} + 4 \cdot 5^{n+1} + 5^{n+2}$, unde $n \in \mathbb{N}$;

d) $90 \mid 15^{2n+1} - 5^{2n} \cdot 9^{n+1}$, unde $n \in \mathbb{N}^*$.

5. Se consideră $\overline{xyz}$ un număr de trei cifre. Se știe că $9 \mid (x + y + z) \Rightarrow 9 \mid \overline{xyz}$ (conform criteriului de divizibilitate cu 9). Demonstrează că:

a) $9 \mid \overline{xyz} \Rightarrow 9 \mid (x + y + z)$;

b) dacă $9 \mid \overline{xyz}$, atunci $9 \mid (\overline{51x} + \overline{71y} + \overline{67z})$.

6. Determină, în fiecare caz, cifra m, știind că:

a) $2 \mid (40 + \overline{71m})$;

b) $5 \mid (40 + \overline{71m})$;

c) $9 \mid (1827 - \overline{m27})$.

7. Determină, în fiecare caz, numerele naturale n pentru care:

a) $(n + 1) \mid (n + 7)$;

b) $(n + 3) \mid (3n + 13)$;

c) $(n + 6) \mid (5n + 48)$.

AUTOEVALUARE

1. Dacă apreciezi că afirmația este adevărată, încercuiește litera A. În caz contrar, încercuiește litera F. **4,5 puncte**

a) Dacă 5 este divizor comun al numerelor a și b, atunci $5 \mid (2a + b)$. A F

b) Dacă $7 \mid (a + 3b)$, atunci $7 \mid (6a + 4b)$. A F

c) Dacă $11 \mid (10a + b)$, atunci $11 \mid (a + 10b)$. A F

2. Încercuiește litera corespunzătoare răspunsului corect. **3 puncte**

a) Numărul natural de forma $\overline{ab}$, pentru care $\overline{ab} \mid \overline{2ab}$ și $a \leq b$, este:

A. 25; B. 55; C. 40; D. 57.

b) Cifra a, pentru care $3 \mid (200 - \overline{a3a})$, este:

A. 1; B. 6; C. 9; D. 3.

3. Completează caseta cu răspunsul corect. **1,5 puncte**

Cel mai mare număr natural n, pentru care $2^n \mid a$, unde $a = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot ... \cdot 30$, este egal cu $\boxed{}$.

Din oficiu: 1 punct

Exerciții și probleme recapitulative

1. a) Determină numărul multiplilor lui 3 cuprinși între 100 și 200.
b) Calculează suma numerelor de forma $\overline{1x3}$ divizibile cu 3.

2. Calculează c.m.m.d.c. și c.m.m.m.c ale numerelor:
a) 144, 180, 320; b) 60, 80, 240;
c) 288, 1260, 720; d) 1890, 2268, 2520.

3. Determină numerele naturale a și b, știind că:
a) $(a, b) = 12$ și $a + b = 144$; b) $(a, b) = 7$ și $a \cdot b = 3234$; c) $(a, b) = 84$ și $[a, b] = 2520$.

4. Determină numerele de forma $\overline{4x1y}$ divizibile cu:
a) 6; b) 15; c) 18; d) 36.

5. Reprezintă mulțimile A și B prin enumerarea elementelor și prin diagrame Venn-Euler, știind că elementele celor două mulțimi sunt numere naturale și:
i) $x \in A \Leftrightarrow x \vdots 3$ și $x < 22$; ii) $x \in B \Leftrightarrow x \mid 12$ și $x < 9$.

6. Notăm cu M mulțimea tuturor numerelor de trei cifre divizibile cu 7.
a) Stabilește dacă $163 \in M$.
b) Calculează diferența dintre cel mai mare și cel mai mic element ale mulțimii M.

7. Determină toate numerele naturale de forma $\overline{x12y6}$ divizibile cu 12.

8. Determină toate perechile de numere naturale (x, y), știind că $x + 2y = 91$ și $(x, 2y) = 13$.

9. Știind că n este un număr natural oarecare, arată că numerele naturale a și b sunt prime între ele, dacă:
a) $a = 2n + 1$ și $b = 3n + 2$; b) $a = 5n + 6$ și $b = 6n + 7$; c) $a = 3n + 4$ și $b = 5n + 7$.

10. În portul Constanța de la Marea Neagră erau ancorate patru șalupe, care făceau curse regulate către diferite destinații. În data de 15 iulie 2022, la amiază, toate patru au părăsit în același timp portul. Se știe că prima șalupă revine în portul Constanța din 4 în 4 săptămâni, a doua din 8 în 8 săptămâni, a treia la fiecare 12 săptămâni, iar a patra la fiecare 16 săptămâni. În ce dată s-au întâlnit din nou, în portul Constanța, toate cele patru șalupe?

11. Un laborator de cofetărie a produs într-o zi 411 bomboane de ciocolată de tip A și 685 de bomboane de tip B. Bomboanele respective trebuie ambalate în cutii identice, astfel încât numărul cutiilor rezultate să fie cel mai mare posibil și fiecare cutie să conțină același număr de bomboane de tip A și același număr de bomboane de tip B. Determină numărul de bomboane de tip A și de tip B din fiecare cutie și numărul total al cutiilor.

12. Mihai, aflat în vacanță la bunici, din neatenție a scăpat din mână un coș cu ouă.

— Bunicule, câte ouă ai avut în coș?

— Nu-mi aduc aminte, dar știu că, dacă scoteam câte 2, câte 3, câte 4 sau câte 5, în coș rămânea de fiecare dată un singur ou, iar dacă scoteam câte 11, nu rămânea niciunul. Ajută-l pe Mihai să calculeze numărul de ouă din coș, știind că acesta este mai mic decât 200.

Portofoliu

Scrie câte 2-3 exemple pentru fiecare proprietate a relației de divizibilitate.
Completează cu încă un exemplu dat de colegul tău de bancă și include-le în portofoliul personal.

FIȘA DE OBSERVARE SISTEMATICĂ A COMPORTAMENTULUI ELEVULUI:

Autoevaluarea comportamentului elevului în procesul de învățare este un instrument util atât cadrului didactic, cât și elevului, pentru a putea determina implicarea acestuia pe parcursul unei unități de învățare. Imprimă această fișă din manualul digital și completeaz-o după parcurgerea fiecărei unități de învățare. Adaugă toate fișele la portofoliul personal.

	Răspunsuri (da, nu, parțial)
Am participat activ la fiecare lecție.	
Am recapitulat înainte de fiecare lecție noțiunile învățate la lecțiile anterioare.	
Am pus întrebări profesorului atunci când am avut nelămuriri.	
Am răspuns întrebărilor adresate de profesor sau de colegi.	
Am colaborat cu colegii la activitățile desfășurate în echipă, pe grupe sau în perechi.	

Apreciază calitatea și cantitatea cunoștințelor acumulate în această unitate de învățare, colorând unul dintre emoticoane, corespunzător gradului tău de mulțumire.

EVALUARE

Timp de lucru: 50 de minute.

Subiectul I. Dacă apreciezi că afirmația este adevărată, completează căsuța alăturată cu litera A. În caz contrar, completează cu litera F.

(5p) **1.** Dacă un număr este divizibil cu 3, atunci el este divizibil 9. ☐

(5p) **2.** Dacă un număr este divizibil cu 4, atunci el este divizibil 2. ☐

(5p) **3.** Dacă $a \vdots b$, $a \vdots c$, iar b și c sunt prime între ele, atunci $a \vdots (b \cdot c)$. ☐

(5p) **4.** Numărul 102 nu are divizori improprii. ☐

Subiectul II. Unește, prin săgeți, fiecare cifră corespunzătoare enunțurilor din coloana **A** cu litera care indică răspunsul corect, aflat în coloana **B**.

	A	B
(5p)	**1.** Dacă p este produsul numerelor naturale n pentru care $(n + 1) \mid 6$, atunci p este egal cu ...	**a)** 18;
(5p)	**2.** Dacă s este suma numerelor naturale n pentru care $(n - 3) \mid (2n + 1)$, atunci suma s este egală cu ...	**b)** 11;
(5p)	**3.** Dacă n este cel mai mare număr natural pentru care $(n - 1) \mid (2n + 8)$, atunci n este egal cu ...	**c)** 14;
(5p)	**4.** Dacă $(n - 2) \mid (16 - n)$ și $(16 - n) \mid (n - 2)$, atunci n este egal cu ...	**d)** 0;
		e) 9.

Subiectul III. Alege litera care indică singura variantă corectă.

(5p) **1.** Numărul $30 \cdot a + 55$ este divizibil cu:

A. 2; **B.** 3; **C.** 4; **D.** 5.

(5p) **2.** Numărul $36 \cdot 37$ este un multiplu al numărului:

A. 5; **B.** 4; **C.** 7; **D.** 10.

(5p) **3.** Produsul $(15, 20) \cdot [15, 20]$ este egal cu:

A. 30; **B.** 300; **C.** 600; **D.** 420.

(5p) **4.** Cel mai mic multiplu comun al numerelor 18, 24 și 36 este egal cu:

A. 72; **B.** 108; **C.** 106; **D.** 216.

La subiectele IV și V scrie rezolvările complete.

Subiectul IV. Determină numerele de forma $\overline{32a}$ care:

(5p) **a)** sunt divizibile cu 2 sau cu 4;

(5p) **b)** sunt divizibile și cu 2 și cu 4;

(5p) **c)** sunt divizibile cu 2, dar nu sunt divizibile cu 4.

Subiectul V. Demonstrează că:

(5p) **a)** numărul $10^n + 125$ este divizibil cu 9, oricare ar fi numărul natural n;

(5p) **b)** numerele de forma $\overline{ab25}$ sunt divizibile cu 25;

(5p) **c)** dacă numărul $\overline{abcd}$ este divizibil cu 25 și $c \neq 0$, atunci $\overline{cd} \in \{25, 50, 75\}$.

Se acordă 10 puncte din oficiu. Nota se obține împărțind punctajul final la 10.

Subiectul	I.1	I.2	I.3	I.4	II.1	II.2	II.3	II.4	III.1	III.2	III.3	III.4	IV.a	IV.b	IV.c	V.a	V.b	V.c
Punctajul																		
Nota																		

CAPITOLUL II

RAPOARTE. PROPORȚII

CUPRINS

II.1. RAPOARTE ȘI PROPORȚII

II.1.1. Rapoarte

Rezolvăm împreună

1. În figura 1 sunt reprezentate segmentele *AB* și *CD*. Știind că *AB* = 1,5 cm și *CD* = 0,06 m, stabilește de câte ori este mai mare lungimea segmentului *CD* decât lungimea segmentului *AB*.

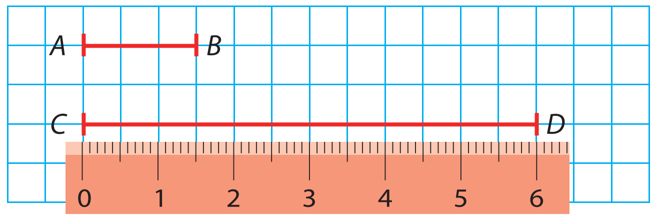


Fig. 1

***Rezolvare*:** Deoarece 0,06 m = 6 cm, rezultă că 6 cm : 1,5 cm = 4. Câtul acestei împărțiri arată că lungimea segmentului *AB* se cuprinde de 4 ori în lungimea segmentului *CD*. Altfel spus, lungimea segmentului *CD* este de 4 ori mai mare decât lungimea segmentului *AB* sau, pe scurt, segmentul *CD* este de 4 ori mai mare decât segmentul *AB*.

2. Un butoi din lemn de cireș are capacitatea de 60 ℓ, iar un alt butoi din lemn de stejar are capacitatea de 150 ℓ. De câte ori este mai mare capacitatea butoiului din lemn de stejar decât cea a butoiului din lemn de cireș?

***Rezolvare*:** Deoarece 150 ℓ : 60 ℓ = 2,5 rezultă că butoiul din lemn de stejar are capacitatea de 2,5 ori mai mare decât capacitatea butoiului din lemn de cireș.

Observăm și descoperim cunoștințe noi

Lungimea este o mărime fizică. Observăm că pentru a putea compara lungimile celor două segmente de mai sus am folosit aceeași unitate de măsură. Notăm 6 cm : 1,5 cm cu $\frac{6\text{ cm}}{1{,}5\text{ cm}}$ și spunem că acesta este *raportul lungimilor celor două segmente*. Observăm că $\frac{6\text{ cm}}{1{,}5\text{ cm}} = \frac{6}{1{,}5} = 4$.

Capacitatea celor două vase este, de asemenea, o *mărime fizică*. La fel, pentru a putea compara capacitatea celor două vase este necesar să folosim aceeași unitate de măsură. Notăm 150 ℓ : 60 ℓ cu $\frac{150\ \ell}{60\ \ell}$ și spunem că acesta este *raportul capacităților celor două vase*. Atunci $\frac{150\ \ell}{60\ \ell} = \frac{150}{60} = 2{,}5$.

În general, *raportul a două mărimi fizice este raportul măsurilor celor două mărimi*.

În științe, dar și în practică, se formează și se folosesc următoarele rapoarte:

- *rapoarte ale unor mărimi fizice de același fel* (de exemplu: *concentrația unei soluții*, *scara unei hărți*, *titlul unui aliaj* etc.);
- *rapoarte ale unor mărimi fizice distincte* (de exemplu: *viteza*, *densitatea* etc.);
- *rapoarte numerice*.

Concentrația unei soluții este raportul dintre masa substanței care se dizolvă și masa soluției.

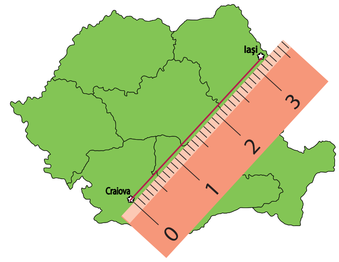
Exemplu: Dacă într-un vas se află o soluție de apă cu sare și *masa soluției* este 240 g, iar *masa sării* este 40 g, atunci *concentrația soluției* este dată de raportul $\frac{40\text{ g}}{240\text{ g}} = \frac{1}{6}$.

Dicționar

soluție = amestec omogen de două sau mai multe substanțe chimice, din care una este, de obicei, lichidă.

Scara unei hărți (a unui desen) este raportul dintre distanța măsurată pe hartă (desen) și distanța măsurată în teren (în realitate).

Exemplu: Pe harta României sunt reprezentate orașele Craiova și Iași. Distanța reală dintre cele două orașe este de 432 km. Pe hartă, distanța este egală cu 3,2 cm.



Scara hărții este 3,2 cm : 432 km = $\frac{32\text{ mm}}{432000000\text{ mm}} = \frac{1}{13500000}$.

Titlul unui aliaj

Aliajul este rezultatul topirii laolaltă a două sau a mai multor metale. De exemplu, alama este un aliaj de cupru și zinc. Dacă un aliaj conține un metal nobil (de exemplu aur), M este masa aliajului și m este masa metalului nobil, atunci raportul $\frac{m}{M}$, notat T, se numește titlul aliajului. Așadar, $T = \frac{m}{M}$.

Exemplu: Teritoriul Transilvaniei de Nord, ocupat de Ungaria la 30 august 1940 în urma Dictatului de la Viena, a fost eliberat de armata română la 25 octombrie 1944. Pentru comemorarea acestui eveniment istoric, la 15 ianuarie 1945 a fost emisă medalia „Ardealul Nostru", din aliaj de aur și cupru. Medalia cântărește 6,55 g și pentru realizarea acesteia s-au folosit 5,895 g de aur. Rezultă că titlul aliajului este $T = \frac{5{,}895}{6{,}55}$.

Efectuând calculele, obținem $T = \frac{5{,}895}{6{,}55} = \frac{5895}{6550} = \frac{9}{10} = 0{,}9$.

Viteza

Distanța și timpul sunt mărimi fizice fundamentale, notate cu d, respectiv t. Unitatea de măsură fundamentală pentru distanță este *metrul*, iar pentru timp este *secunda*. Prin raportul $\frac{d}{t}$ se definește o nouă mărime fizică denumită viteză și notată cu v. Deci, $v = \frac{d}{t}$.

Exemplu: Dacă o persoană parcurge 8 km în 2 ore, se formează raportul $\frac{8\text{ km}}{2\text{ h}} = \frac{8}{2}$ km/h și se spune că persoana s-a deplasat cu viteza de $\frac{8}{2} = 4$ (km pe oră).

Unitatea fundamentală de măsură pentru viteză este *m/s* (se citește „*metru pe secundă*"). În fizică se folosește notația $\langle v \rangle$ care se citește „*unitate de măsură pentru viteză*". Așadar: $v = \frac{d}{t}$ și $\langle v \rangle = 1$ m/s.

Știai că...

Dintre animale, ghepardul este, de departe, cel mai rapid și cel mai bun sprinter, putând atinge viteza de 120 km/h. El reușește în numai 3 secunde să atingă viteza de 100 km/h. Toate cele patru membre ale sale se încrucișează pentru a obține o distanță maximă a pasului. Cu o coloană vertebrală deosebit de flexibilă, ghepardul se poate întinde foarte mult. Ghearele ghepardului se comportă precum crampoanele unui pantof de alergare, ajutându-l să-și mărească aderența atunci când sprintează.

Densitatea de masă

Dacă se notează cu m masa unui corp și cu V volumul corpului, densitatea de masă se notează cu litera grecească ρ (ro) și se definește astfel: $\rho = \frac{m}{V}$. Densitatea de masă, numită și *masa specifică*, se măsoară în *kilograme pe metru cub*. Așadar, $\langle \rho \rangle = 1\ kg/m^3$.

Exemplu: Densitatea apei distilate este 1000 kg/m^3, iar densitatea apei de mare este 1026 kg/m^3. *Raportul dintre densitatea apei de mare și densitatea apei distilate* este egal cu $\frac{1026}{1000} = 1{,}026$. Acest raport arată că densitatea apei de mare este de 1,026 ori mai mare decât densitatea apei distilate.

Raport numeric

Numărul $a : b$, notat $\frac{a}{b}$, unde a, b sunt două numere și $b \neq 0$, se numește *raportul numeric dintre numărul a și numărul b*. Rezultatul calculului $a : b$ se numește *valoarea raportului* $\frac{a}{b}$.

Exemplu: Dacă $a = 1{,}(3)$ și $b = \frac{6}{5}$, atunci valoarea raportului $\frac{a}{b}$ este rezultatul calculului $a : b$. Deoarece $a : b = 1{,}(3) : \frac{6}{5} = \frac{4}{3} : \frac{6}{5} = \frac{4}{3} \cdot \frac{5}{6} = \frac{10}{9}$, valoarea raportului este 1,(1). Notăm $\frac{a}{b} = \frac{10}{9}$ sau $\frac{a}{b} = 1{,}(1)$.

Raportul numeric este raportul dintre două numere.

Analizând exemplele de mai sus, remarcăm că *raportul a două mărimi fizice de același fel este întotdeauna egal cu un raport numeric*.

Reține!

- **Raportul a două mărimi fizice este raportul măsurilor acestor mărimi.**

Termenii raportului sunt măsurile celor două mărimi fizice.

Există:

- **rapoarte în care termenii sunt mărimi fizice distincte**;
  Un raport care are ca termeni mărimi fizice distincte conduce la definirea unei noi mărimi fizice (de exemplu: *viteza* și *densitatea*).
- **rapoarte în care termenii sunt mărimi fizice de același fel** (de exemplu: *concentrația unei soluții, scara unei hărți, titlul unui aliaj* etc.);
  Câtul măsurilor celor doi termeni ai raportului este un număr, numit **valoarea raportului,** care permite compararea celor două măsuri ale mărimilor fizice.
- **rapoarte numerice în care termenii sunt două numere *a* și *b*, *b* ≠ 0** (de exemplu: *fracțiile ordinare, probabilitățile*[1]);

  Raportul numeric de forma $\frac{p}{100}$ se numește **raport procentual**, se notează cu $p\%$ și se citește *„p la sută”* sau *„p procente”*.

- **Raportul a două mărimi fizice de același fel este întotdeauna un raport numeric.**

[1] *Fracțiile ordinare și zecimale* au fost studiate în clasa a V-a. *Probabilitățile* fac obiectul unor cunoștințe ulterioare.

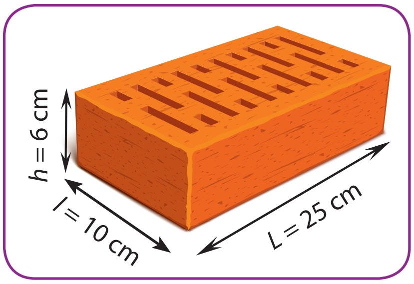
Exersează, fixează și aprofundează cunoștințele

1. Răspunde la următoarele întrebări:

a) Ce este concentrația unei soluții?
b) Ce este scara unei hărți?
c) Ce este titlul unui aliaj?
d) Ce este viteza?
e) Ce este densitatea de masă?
f) Ce este un raport numeric?

2. Calculează:

a) concentrația unei soluții de sare, știind că soluția are 100 g și conține 25 g de sare;
b) scara unei hărți, dacă 1 cm pe hartă reprezintă 250 m;
c) titlul unui aliaj din aur și cupru, dacă o bijuterie realizată din acest aliaj cântărește 6 g și pentru confecționarea acesteia bijutierul a folosit 5,4 g de aur;
d) viteza unui avion, dacă acesta parcurge în 3 ore 2400 km;
e) densitatea unei cărămizi în formă de paralelipiped dreptunghic, care are masa de 0,9 kg și dimensiunile: lungimea de 25 cm, lățimea de 10 cm, înălțimea de 6 cm.



3. Un avion zboară cu viteza de 840 km/h, iar un tren merge cu viteza de 120 km/h.

a) Calculează raportul dintre viteza avionului și viteza trenului.
b) Calculează raportul dintre viteza trenului și viteza avionului.
c) De câte ori este mai rapid avionul decât trenul?

4. Calculează valoarea raportului $\frac{a}{b}$ în următoarele cazuri:

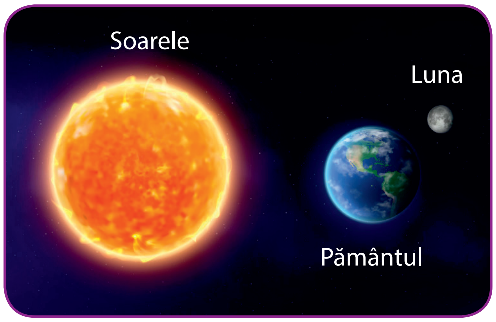
a) $a = 24$ m și $b = 12$ km;
b) $a = 17$ dm și $b = 1{,}7$ hm;
c) $a = 0{,}5$ ha și $b = 250$ ari;
d) $a = 2{,}(3)$ dm^3 și $b = 0{,}(3)$ m^3;
e) $a = 200$ minute și $b = 1{,}5$ ore;
f) $a = 18$ km/h și $b = 0{,}5$ m/s.

5. Pentru a prepara o zacuscă tradițională, o gospodină folosește 2,5 kg de vinete proaspete, 750 g de gogoșari, 250 g de ceapă și 1,5 kg de roșii. Calculează procentul corespunzător fiecărei legume din cantitatea de legume folosită.

6. Venitul lunar al unei familii este 3000 de lei, iar cheltuielile lunare sunt: 20% chiria, 15% transportul, 40% hrana, 8% îmbrăcămintea, 11% energia electrică, 6% diverse cheltuieli. Calculează și completează următorul tabel cu sumele corespunzătoare cheltuielilor.

Cheltuieli	Chirie	Transport	Hrană	Îmbrăcăminte	Energie	Diverse

7. Raportul dintre diametrul Lunii și diametrul Pământului este $\frac{3}{11}$. Raportul dintre diametrul Soarelui și diametrul Pământului este $\frac{108}{1}$. Calculează raportul dintre diametrul Lunii și cel al Soarelui.



8. Se dizolvă sare în apă și se obține o soluție care cântărește 25 g. Concentrația soluției este de $\frac{9}{10}$. Calculează câtă apă trebuie adăugată pentru a obține o soluție cu concentrația de $\frac{3}{20}$.

AUTOEVALUARE

10 min

1. Încercuiește litera corespunzătoare răspunsului corect. **3 puncte**

a) Dacă scara unei hărți este 1 : 500000, atunci unei distanțe de 50 km din teren îi corespunde pe hartă distanța de:

A. 10 cm; **B.** 10 mm; **C.** 5 cm; **D.** 5 mm.

b) Dacă valoarea raportului lungimilor laturilor a două pătrate este egală cu 0,(6), atunci raportul ariilor celor două pătrate este egal cu:

A. $\frac{2}{3}$; **B.** $\frac{4}{9}$; **C.** $\frac{4}{3}$; **D.** $\frac{2}{9}$.

2. Unește, prin săgeți, fiecare enunț aflat în coloana din stânga cu răspunsul corespunzător aflat în coloana din dreapta. **4,5 puncte**

a) Dacă numărul x se mărește cu 10%, rezultă un număr egal cu ...

b) Dacă numărul x se micșorează cu 10%, rezultă un număr egal cu ...

c) Dacă numărul x se micșorează cu 10% și rezultatul se mărește cu 10%, se obține un număr egal cu ...

1) 99% din x;

2) 90% din x;

3) 110% din x;

4) 100% din x.

3. Completează caseta cu răspunsul corect. **1,5 puncte**

Se amestecă 237,6 g de apă cu 2,4 g de sare. Se obține o soluție cu concentrația egală cu $\boxed{}$.

Din oficiu: 1 punct

II.1.2. PROPORȚII

Rezolvăm împreună

În piață, Mihai observă o bucată dintr-un afiș, pe care sunt scrise prețurile pentru diferite cantități de mere (figura 1). La scurt timp, el se adresează Sorinei, colega lui de clasă: „Valoarea raportului dintre preț și cantitatea de mere corespunzătoare este aceeași”.

Mere	Preț
4 kg	8 lei
5 kg	10 lei
6 kg	12 lei

Fig. 1

a) Stabilește dacă afirmația lui Mihai este adevărată.

b) Folosind afirmația lui Mihai, calculează prețul pentru 1,5 kg de mere.

c) Sorina afirmă: „Valoarea raportului dintre preț și cantitatea de mere corespunzătoare este egală cu valoarea prețului pentru un kilogram de mere”. Stabilește dacă afirmația Sorinei este adevărată.

Rezolvare:

a) Notăm cu C cantitatea de mere cumpărate și cu P prețul pentru cantitatea respectivă. Atunci: $\frac{P}{C}=\frac{8\text{ lei}}{4\text{ kg}}=2$ lei/kg, $\frac{P}{C}=\frac{10\text{ lei}}{5\text{ kg}}=2$ lei/kg, $\frac{P}{C}=\frac{12\text{ lei}}{6\text{ kg}}=2$ lei/kg. În toate cazurile, valoarea raportului este egală cu 2 lei/kg, adică este aceeași. Prin urmare, afirmația lui Mihai este adevărată.

b) Pentru 1,5 kg de mere cumpărate, se plătește suma de x lei. Conform afirmației lui Mihai, $\frac{x}{1{,}5}=2$, de unde $x = 2 \cdot 1{,}5$, adică $x = 3$. Deci, pentru 1,5 kg de mere se plătesc 3 lei.

c) Pentru 1 kg de mere se plătește suma de y lei. Conform afirmației Sorinei, $\frac{y}{1}=2$, deci $y = 2$, adică pentru 1 kg de mere se plătesc 2 lei. Deducem că valoarea raportului dintre preț și cantitatea de mere corespunzătoare este egală cu prețul pentru un kilogram de mere și afirmația este adevărată.

Observăm și descoperim cunoștințe noi

Din rezolvarea precedentă rezultă că oricare dintre rapoartele $\frac{8}{4}, \frac{10}{5}, \frac{12}{6}, \frac{3}{1{,}5}$ are valoarea 2.

Despre două rapoarte care au aceeași valoare se spune că formează o **proporție**. Prin urmare, $\frac{8}{4} = \frac{10}{5}$, $\frac{8}{4} = \frac{3}{1{,}5}$, $\frac{12}{6} = \frac{3}{1{,}5}$ sunt trei exemple de proporții.

Dacă două rapoarte $\frac{a}{b}$ și $\frac{c}{d}$ formează o proporție, notăm $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$. Despre *a, b, c* și *d* spunem că sunt *termenii proporției*. Termenii *a* și *d* se numesc *extremi*, iar *b* și *c* se numesc *mezi*.

$\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$

extremi

$a : b = c : d$

mezi

a și *d* sunt *extremi*

b și *c* sunt *mezi*

Reține!

- Două **rapoarte** sunt **egale** dacă au aceeași valoare.
- **Proporția** este egalitatea a două rapoarte.
- Termenii proporției $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ sunt: *a, b, c* și *d* ($a \neq 0, b \neq 0, c \neq 0, d \neq 0$). Termenii *a* și *d* se numesc **extremi**.

Temenii *b* și *c* se numesc **mezi**.
- **Proprietatea fundamentală a proporției**: într-o proporție, produsul mezilor este egal cu produsul extremilor. Prin urmare, dacă $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ rezultă că $a \cdot d = b \cdot c$. Reciproc, din egalitatea $a \cdot d = b \cdot c$ rezultă proporția $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$. Așadar: $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Leftrightarrow a \cdot d = b \cdot c$.
- Prin amplificarea sau simplificarea unui raport cu un număr diferit de zero se obține o proporție.

Observăm și descoperim cunoștințe noi

Calculează termenul necunoscut, notat cu *x*, din proporția $\frac{x}{0{,}75} = \frac{2}{3}$.

Rezolvare:

Deoarece $\frac{x}{0{,}75} = \frac{2}{3}$ este o proporție, putem aplica *proprietatea fundamentală a proporției*. Rezultă că *produsul extremilor este egal cu produsul mezilor*: $3 \cdot x = 2 \cdot 0{,}75$, de unde $3 \cdot x = 1{,}5$. În produsul $3 \cdot x = 1{,}5$ punem în evidență factorul *x* și obținem că $x = 1{,}5 : 3$, adică $x = 0{,}5$ sau $x = \frac{1}{2}$. Deoarece $1{,}5 : 3$ poate fi scris $\frac{1{,}5}{3}$, rezultă că $x = \frac{1{,}5}{3}$. Dar, în proporția $\frac{x}{0{,}75} = \frac{2}{3}$, numărul 1,5 este produsul mezilor 2 și 0,75, iar *x* și 3 sunt extremi. Prin urmare, observăm că *un extrem* $= \dfrac{\textit{produsul mezilor}}{\textit{celălalt extrem}}$.

Acest rezultat poate fi demonstrat pentru orice proporție. De asemenea, se poate demonstra că *un mez* $= \dfrac{\textit{produsul extremilor}}{\textit{celălalt mez}}$.

Reține!

- **Determinarea unui termen necunoscut dintr-o proporție:**

$$\textit{un extrem} = \frac{\textit{produsul mezilor}}{\textit{celălalt extrem}}; \qquad \textit{un mez} = \frac{\textit{produsul extremilor}}{\textit{celălalt mez}}.$$

Aplicăm cunoștințele

Calculează numărul x din proporția $\frac{x}{12} = \frac{\frac{1}{3}+\frac{1}{4}}{7}$.

Rezolvare:

Extremii proporției sunt x și 7. *Mezii* proporției sunt 12 și $\frac{1}{3}+\frac{1}{4}$. Cum $\textit{un extrem} = \frac{\textit{produsul mezilor}}{\textit{celălalt extrem}}$, rezultă că $x = \frac{12 \cdot \left(\frac{1}{3}+\frac{1}{4}\right)}{7}$. Aplicând proprietatea de distributivitate a înmulțirii față de adunare rezultă că $x = \frac{12 \cdot \frac{1}{3} + 12 \cdot \frac{1}{4}}{7}$, de unde $x = \frac{4+3}{7}$, adică $x = 1$.

Exersează, fixează și aprofundează cunoștințele

1. Calculează valoarea fiecărui raport și stabilește care dintre următoarele perechi de rapoarte formează o proporție.

a) $\frac{150}{4}$ și $\frac{0{,}75}{0{,}02}$; **b)** $\frac{7}{6}$ și $\frac{3{,}5}{3}$; **c)** $\frac{217}{14}$ și $\frac{31}{2}$.

2. Utilizând proprietatea fundamentală a proporțiilor, stabilește care dintre următoarele perechi de rapoarte pot forma o proporție.

a) $\frac{3}{7}$ și $\frac{5}{9}$; **b)** $\frac{44}{21}$ și $\frac{11}{5{,}25}$; **c)** $\frac{7}{11}$ și $\frac{1{,}75}{2{,}75}$; **d)** $\frac{2\frac{1}{2}+3}{\frac{1}{2}+\frac{1}{3}}$ și $\frac{0{,}(3)\cdot 1\frac{1}{5}}{4}$.

3. Determină termenul necunoscut din următoarele proporții:

a) $\frac{x}{3} = \frac{5}{2}$; **b)** $\frac{0{,}(3)}{2} = \frac{x}{0{,}(2)}$; **c)** $\frac{x}{0{,}5} = \frac{\frac{1}{2}}{3}$; **d)** $\frac{\frac{1}{4}}{2} = \frac{\frac{3}{2}}{x}$.

4. Raportul a două numere este $\frac{2}{3}$. Cel mai mare dintre numere este 24. Calculează celălalt număr.

5. **Activitate în perechi.** Determinați două numere, știind că:

a) valoarea raportului celor două numere este 0,5 și suma numerelor este egală cu 75;

b) valoarea raportului celor două numere este 0,(3) și diferența numerelor este egală cu 12.

6. Știind că $\frac{x}{y} = \frac{2}{3}$, calculează valorile următoarelor rapoarte:

a) $\frac{5x+3y}{3x-y}$; **b)** $\frac{7x-2y}{4x}$; **c)** $\frac{2{,}7x-1{,}8y+4{,}5}{4{,}5x-3y+1{,}5}$.

7. Un autobuz școlar merge cu viteza constantă de 60 km/h. În tabelul de mai jos, *d* reprezintă distanța parcursă de autobuz și *t* este timpul în care este parcursă această distanță.

d	120 km	15 km	x km	y km
t	a ore	b ore	$\frac{1}{3}$ ore	$\frac{2}{3}$ ore

a) Ce definește fiecare dintre perechile de rapoarte:

$\frac{120 \text{ km}}{a \text{ ore}}$ și $\frac{15 \text{ km}}{b \text{ ore}}$; $\frac{x \text{ km}}{\frac{1}{3} \text{ ore}}$ și $\frac{y \text{ km}}{\frac{2}{3} \text{ ore}}$; $\frac{x \text{ km}}{\frac{1}{3} \text{ ore}}$ și $\frac{120 \text{ km}}{a \text{ ore}}$?

b) Fără a calcula numerele *a*, *b*, *x* și *y*, arată că perechile de rapoarte de mai sus sunt proporții.

c) Calculează numerele *a*, *b*, *x*, *y*.

8. Determină numărul *x* din următoarele proporții:

a) $\frac{3x+1}{11}=2$; **b)** $\frac{4}{2x-3}=0,8$; **c)** $\frac{5x-1}{x+7}=\frac{7}{5}$;

d) $\frac{4x-3}{0,(3)}=\frac{7x+1}{1}$; **e)** $\frac{12}{5x+4}=\frac{7}{3x+2}$; **f)** $\frac{0,2x+2,5}{x+1}=\frac{2,4}{8}$.

AUTOEVALUARE

10 min

1. Dacă apreciezi că afirmația este adevărată, încercuiește litera A. În caz contrar, încercuiește litera F. **4 puncte**

Dacă $\frac{a}{b}=\frac{3}{2}$ este o proporție, atunci:

a) *a* și *b* sunt termeni ai proporției, numiți extremi; **A** **F**

b) *a* și *b* sunt termeni ai proporției, numiți mezi; **A** **F**

c) *a* și 2 sunt termeni ai proporției, numiți extremi; **A** **F**

d) *b* și 2 sunt termeni ai proporției, numiți extremi. **A** **F**

2. Încercuiește litera corespunzătoare răspunsului corect. **3 puncte**

a) Două rapoarte $\frac{a}{b}$ și $\frac{c}{d}$, unde $a, b, c, d \in \mathbb{N}$, $b \neq 0$, $d \neq 0$, formează o proporție dacă:

A. $a \cdot c = b \cdot d$; **B.** $a \cdot b = c \cdot d$; **C.** $a : b = c : d$; **D.** $a \cdot d \neq c \cdot d$.

b) Dacă $\frac{3}{x+1}=\frac{2}{7}$, atunci numărul *x* este egal cu:

A. 9,3; **B.** 9,4; **C.** 9,5; **D.** 9,6.

3. Completează caseta cu răspunsul corect. **2 puncte**

Dacă $\frac{2x}{3y}=\frac{5z}{7t}$, atunci $11-\frac{14xt}{15yz}$ este un număr natural egal cu $\boxed{}$.

Din oficiu: 1 punct

II.1.3. PROPORȚII DERIVATE

Rezolvăm împreună

Se dă o proporție oarecare $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$. Scrie expresia care rezultă din proporția dată, prin:

a) schimbarea extremilor între ei; **b)** schimbarea mezilor între ei;

c) inversarea rapoartelor.

$$\frac{a}{b}=\frac{c}{d} \Leftrightarrow a \cdot d = b \cdot c$$

Rezolvare:

a) Din proporția dată, $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$, schimbând extremii între ei, rezultă expresia $\frac{d}{b}=\frac{c}{a}$.

b) Din proporția dată, $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$, schimbând mezii între ei, rezultă expresia $\frac{a}{c}=\frac{b}{d}$.

c) Din proporția dată, $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$, inversând rapoartele, rezultă expresia $\frac{b}{a}=\frac{d}{c}$.

Deoarece $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$ este o proporție, rezultă egalitatea $a \cdot d = b \cdot c$. Constatăm că această egalitate se păstrează pentru fiecare dintre expresiile obținute anterior. Prin urmare, aceste expresii sunt *proporții pentru care mulțimea termenilor este aceeași cu mulțimea termenilor proporției date inițial.* Ele se numesc proporții derivate cu aceiași termeni.

Reține!

Reguli de obținere a proporțiilor derivate

- **Proporții derivate cu aceiași termeni** se obțin dintr-o proporție dată prin:
  1) schimbarea extremilor între ei;
  2) schimbarea mezilor între ei;
  3) inversarea rapoartelor.
- **Proporții derivate cu termeni schimbați** se obțin dintr-o proporție dată prin:
  1) egalarea fiecărui raport cu raportul dintre suma numărătorilor și suma numitorilor rapoartelor proporției date;
  2) egalarea fiecărui raport cu raportul dintre diferența numărătorilor și diferența numitorilor rapoartelor proporției date;
  3) modificarea numărătorilor sau a numitorilor ambelor rapoarte ale proporției date.

Modificarea numărătorilor ambelor rapoarte ale proporției $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$ presupune:

★ adunarea numitorilor la numărători:

$$\frac{a+b}{b}=\frac{c+d}{d};$$

★ scăderea numitorilor din numărători:

$$\frac{a-b}{b}=\frac{c-d}{d}\ (a>b, c>d).$$

***Exemple*:** Din proporția $\frac{2}{3}=\frac{6}{9}$ se obțin:

- *proporții derivate cu aceiași termeni:*

1. $\frac{9}{3}=\frac{6}{2}$; **2.** $\frac{2}{6}=\frac{3}{9}$; **3.** $\frac{3}{2}=\frac{9}{6}$.

- *proporții derivate cu termeni schimbați:*

1. $\frac{2}{3}=\frac{2+6}{3+9}$ și $\frac{6}{9}=\frac{2+6}{3+9}$, adică $\frac{2}{3}=\frac{8}{12}$ și $\frac{6}{9}=\frac{8}{12}$;

2. $\frac{2}{3}=\frac{6-2}{9-3}$ și $\frac{6}{9}=\frac{6-2}{9-3}$, adică $\frac{2}{3}=\frac{4}{6}$ și $\frac{6}{9}=\frac{4}{6}$.

3. $\frac{2}{3}=\frac{6}{9} \Rightarrow \frac{2+3}{3}=\frac{6+9}{9}$, adică $\frac{5}{3}=\frac{15}{9}$;

$\frac{5}{3}=\frac{15}{9} \Rightarrow \frac{5-3}{3}=\frac{15-9}{9}$, adică $\frac{2}{3}=\frac{6}{9}$;

$\frac{2}{3}=\frac{6}{9} \Rightarrow \frac{2}{3+2}=\frac{6}{9+6}$, adică $\frac{2}{5}=\frac{6}{15}$;

$\frac{2}{5}=\frac{6}{15} \Rightarrow \frac{2}{5-2}=\frac{6}{15-6}$, adică $\frac{2}{3}=\frac{6}{9}$.

Modificarea numitorilor ambelor rapoarte ale proporției $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$ presupune:

★ adunarea numărătorilor la numitori: $\frac{a}{b+a}=\frac{c}{d+c}$;

★ scăderea numărătorilor din numitori: $\frac{a}{b-a}=\frac{c}{d-c}$ $(b>a, d>c)$.

Aplicăm cunoștințele

Știind că $\frac{x}{y}=\frac{11}{13}$ și $x+y=12$:

a) calculează $\frac{x+y}{y}$ și scrie rezultatul sub formă de fracție ordinară ireductibilă;

b) determină numerele x și y, scriind rezultatele sub formă de fracții zecimale.

***Rezolvare*:**

Din proporția $\frac{x}{y}=\frac{11}{13}$, schimbând mezii între ei, rezultă proporția cu aceiași termeni $\frac{x}{11}=\frac{y}{13}$. Notăm valoarea celor două rapoarte cu k. Deoarece $\frac{x}{11}=k$ și $\frac{y}{13}=k$, rezultă $x=11k$ și $y=13k$. Înlocuind în egalitatea $x+y=12$, rezultă $11k+13k=12$, de unde $24k=12$ și $k=\frac{1}{2}$. Din $x=11k$, $y=13k$ și $k=\frac{1}{2}$ obținem $x=5{,}5$ și $y=6{,}5$.

Exersează, fixează și aprofundează cunoștințele

1. Se dă proporția $\frac{4}{8}=\frac{3}{6}$. Folosind această proporție:

a) scrie trei proporții derivate cu aceiași termeni;

b) scrie două proporții derivate cu termeni schimbați, păstrând raportul $\frac{3}{6}$;

c) scrie două proporții derivate cu termeni schimbați, păstrând numitorii;

d) scrie două proporții derivate cu termeni schimbați, păstrând numărătorii.

2. Știind că $\frac{a}{3}=\frac{b}{7}$, calculează rapoartele:

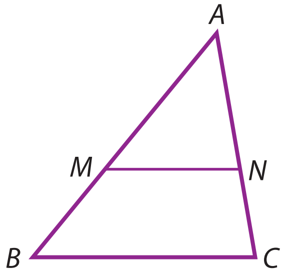
a) $\frac{a}{b}$; **b)** $\frac{a^2}{b^2}$; **c)** $\frac{5a}{4b}$.

3. Dacă $\frac{x}{y}=\frac{3}{16}$ și $x+y=38$, determină:

a) $\frac{x}{x+y}$; **b)** $\frac{x+y}{y}$; **c)** x; **d)** y.

4. Dacă $\frac{x+3}{x+8}=\frac{14}{19}$, determină numărul x.

5. În figura alăturată, punctele M și N aparțin segmentelor AB și AC, astfel încât $\frac{AM}{AB}=\frac{AN}{AC}$. Demonstrează că:



a) $\frac{AM}{MB}=\frac{AN}{NC}$; **b)** $\frac{BM}{AB}=\frac{CN}{AC}$.

6. Pe terenul agricol de care dispune, un fermier a cultivat porumb, grâu, vinete și roșii. Raportul dintre suprafața cultivată cu porumb și cea cultivată cu grâu este egal cu $\frac{4}{7}$, iar raportul dintre suprafața cultivată cu roșii și cea cultivată cu vinete este egal cu $\frac{1}{3}$. Dacă diferența dintre suprafața cultivată cu grâu și cea cultivată cu porumb este de 6 ha, iar suprafața cultivată cu legume (roșii și vinete) este de 1 ha, calculează câte hectare au fost cultivate cu:

a) grâu; **b)** porumb; **c)** vinete; **d)** roșii.

7. Activitate în perechi

Demonstrați că: **a)** dacă $\frac{2x-y}{3x+2y}=\frac{2}{5}$, atunci $\frac{x}{y}=\frac{9}{4}$; **b)** dacă $\frac{x}{y}=\frac{9}{4}$, atunci $\frac{2x-y}{3x+2y}=\frac{2}{5}$.

Observație: La subpunctul a) aveți de demonstrat următoarea echivalență: $\frac{2x-y}{3x+2y}=\frac{2}{5} \Leftrightarrow \frac{x}{y}=\frac{9}{4}$.

8. Știind că $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$, demonstrează că $\frac{2a+3b}{5a+7b}=\frac{2c+3d}{5c+7d}$.

AUTOEVALUARE

10 min

1. Încercuiește litera corespunzătoare răspunsului corect. **3 puncte**

a) Dacă numărul *a* este egal cu 75% din numărul *b*, atunci se poate scrie proporția:

A. $\frac{a}{b}=\frac{4+a}{3+a}$; **B.** $\frac{a}{b}=\frac{3+a}{4+a}$; **C.** $\frac{a}{b}=\frac{100}{75}$; **D.** $\frac{a}{b}=\frac{75}{100}$.

b) Dacă raportul a două numere este egal cu $\frac{2}{11}$ și suma lor este egală cu 39, atunci cel mai mare dintre cele două numere este egal cu:

A. 31; **B.** 32; **C.** 33; **D.** 34.

2. Unește, prin săgeți, fiecare enunț aflat în coloana din stânga cu răspunsul corespunzător aflat în coloana din dreapta. **4,5 puncte**

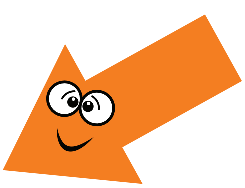
Dacă $\frac{x}{y}=\frac{3}{5}$, atunci:

a) $\frac{x}{x+y}$ este egal cu ... **1)** $\frac{3}{5}$;

b) $\frac{x+3}{y+5}$ este egal cu ... **2)** $\frac{8}{5}$;

c) $\frac{x+y}{y}$ este egal cu ... **3)** $\frac{3}{8}$;

4) $\frac{5}{3}$.



3. Completează caseta cu răspunsul corect. **1,5 puncte**

Dacă $\frac{x}{y}=\frac{5}{6}$, atunci $\frac{x+y}{x}$ este o fracție zecimală egală cu $\boxed{}$.

Din oficiu: 1 punct

Exerciții și probleme recapitulative

1. Tudor a cumpărat o carte și un caiet pentru care a plătit 27 de lei. Calculează prețul unei cărți și prețul unui caiet, știind că prețul caietului reprezintă 8% din prețul cărții.

2. Pe harta din sala de clasă este scrisă scara 1 : 900000. Calculează:

a) distanța (în centimetri) dintre două localități de pe hartă, dacă distanța reală este de 270 km;

b) distanța reală (în kilometri) dintre două localități, știind că distanța pe hartă este de 20 cm.

3. **a)** Desenează un segment AB cu lungimea de 0,08 m.

b) Reprezintă punctul M pe segmentul AB, astfel încât $\frac{AM}{MB} = \frac{2}{3}$.

c) Calculează lungimile segmentelor AM, AB și valoarea raportului $\frac{AM}{AB}$.

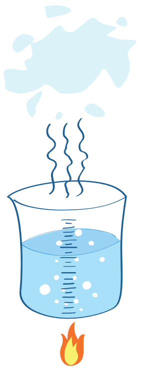
4. **a)** Calculează concentrația unei soluții obținute din 343 g de apă și 7 g de sare.

b) Calculează cantitatea de sare care se află într-o soluție cu concentrația de 12% și care cântărește 225 kg.

5. Într-un vas se află 25 ℓ de soluție de apă cu sare, având concentrația de 8%. Prin fierbere, după două ore se evaporă 5 ℓ de apă. Calculează:

a) cantitatea de sare care se află în soluție;

b) concentrația soluției obținute după evaporarea apei.



6. Calculează:

a) 12% din 125; **b)** 2,4% din 4500.

7. Calculează cât la sută reprezintă:

a) 315 din 4500; **b)** 150 din 75.

8. Determină un număr, știind că:

a) 20% din el este 270; **b)** 5,5% din el este 22.

9. Calculează:

a) titlul unui aliaj ce conține 720 g de aur și 1280 g de aramă;

b) cantitatea de argint care se află în 360 g de aliaj cu titlul de 0,125.

c) titlul unui aliaj obținut din două aliaje, unul cu titlul de 0,700, din care se iau 20 g, și altul cu titlul de 0,900, din care se iau 30 g.

10. Calculează termenul necunoscut din următoarele proporții:

a) $\frac{x}{3} = \frac{8}{15}$; **b)** $\frac{7}{x} = \frac{14}{9}$; **c)** $\frac{11}{17} = \frac{x}{102}$; **d)** $\frac{2}{19} = \frac{30}{x}$.

11. Știind că $\frac{a}{b} = \frac{2}{3}$, calculează valoarea rapoartelor:

a) $\frac{a}{a+b}$; **b)** $\frac{2a+b}{a+2b}$; **c)** $\frac{2a-b}{2b-a}$; **d)** $\frac{3a+2b}{2b-a}$; **e)** $\frac{b-a}{2a-b}$.

12. Determină numerele a și b, știind că $\frac{a}{b} = \frac{3}{5}$ și:

a) $a + b = 40$; **b)** $3a - b = 16$; **c)** $2a + 3b = 63$.

EVALUARE

Timp de lucru: 50 de minute.

Subiectul I. Dacă apreciezi că afirmația este adevărată, completează căsuța alăturată cu litera A. În caz contrar, completează cu litera F.

(5p) **1.** Valoarea lui x din proporția $\frac{x}{15}=\frac{6}{5}$ este 18. ☐

(5p) **2.** Numărul cu 5% mai mic decât 40 este 35. ☐

(5p) **3.** Titlul unui aliaj care conține 102 g de aur și 714 g de cupru este 0,125. ☐

(5p) **4.** Dacă valoarea raportului a două numere este 0,5 și suma lor este 75, atunci cel mai mare dintre numere este 50. ☐

Subiectul II. Unește, prin săgeți, fiecare cifră corespunzătoare enunțurilor din coloana **A**, cu litera care indică răspunsul corect aflat în coloana **B**.

	A	B
(5p)	**1.** Dacă $\frac{5a}{7b}=\frac{1}{21}$, atunci $\frac{b}{a}$ este egal cu ...	**a)** 48;
(5p)	**2.** Dacă $\frac{a}{3}=\frac{5}{12}$, atunci $60a$ este egal cu ...	**b)** 49;
(5p)	**3.** Dacă $\frac{a}{b}=\frac{x}{y}$, atunci $50-\frac{ay}{bx}$ este egal cu ...	**c)** 75;
(5p)	**4.** Dacă $\frac{x+3}{12}=\frac{2}{3}$, atunci x este egal cu ...	**d)** 15;
		e) 5.

Subiectul III. Pentru cerințele care urmează, alege litera care indică singura variantă corectă.

(5p) **1.** Raportul a două numere este $\frac{1}{3}$. Cel mai mic dintre numere este 14. Diferența celor două numere este egală cu:

A. 42; **B.** 28; **C.** 14; **D.** 56.

(5p) **2.** Se consideră numerele $a=1\frac{1}{2}$ și $b=0{,}2$. Valoarea raportului numerelor a și b este egală cu:

A. 7,5; **B.** 0,1(3); **C.** 2,5; **D.** 3,5.

(5p) **3.** Dacă $\frac{x}{y}=\frac{3}{5}$, atunci $\frac{5x-y}{2y-3x}$ este egal cu:

A. 0,6; **B.** 1,(6); **C.** 10; **D.** 5.

(5p) **4.** Dacă $\frac{5x+3y}{7x-y}=\frac{17}{16}$, atunci valoarea raportului $\frac{y}{x}$ este egală cu:

A. 1,(6); **B.** 0,(6); **C.** 1,5; **D.** 0,6.

La subiectul IV scrie rezolvarea completă.

Subiectul IV. Prețul unui obiect se mărește de două ori succesiv cu câte 10%.

(10p) **a)** Calculează prețul inițial al obiectului, știind că prețul după cele două măriri este de 726 de lei.

(10p) **b)** Calculează prețul după prima mărire.

(10p) **c)** Cu ce procent ar fi trebuit să fie făcută o singură mărire de preț, astfel încât prețul obiectului să ajungă direct la prețul obținut după cele două măriri?

Se acordă 10 puncte din oficiu. Nota se obține împărțind punctajul final la 10.

Subiectul	I.1	I.2	I.3	I.4	II.1	II.2	II.3	II.4	III.1	III.2	III.3	III.4	IV.a	IV.b	IV.c
Punctajul															
Nota															

II.2. MĂRIMI PROPORȚIONALE

II.2.1. Șir de rapoarte egale. Mărimi direct proporționale

Rezolvăm, observăm și descoperim cunoștințe noi

Fiecare pix cumpărat de Ioana are același preț. Pentru 7 pixuri Ioana plătește 14 lei.

a) Determină prețul unui pix.

b) Se notează cu *n* numărul de pixuri și cu *p* prețul în lei al celor *n* pixuri. Copiază și completează tabelul 1.

c) Justifică egalitatea rapoartelor pe care le-ai scris în tabel.

d) Știind că Mara a cumpărat de 4 ori mai multe pixuri decât Ioana, stabilește dacă Mara a plătit mai mult sau mai puțin decât Ioana și de câte ori a plătit mai mult sau mai puțin.

e) Știind că Vlad a cumpărat de 14 ori mai puține pixuri decât Mara, stabilește dacă Vlad a plătit mai mult sau mai puțin decât Mara și de câte ori a plătit mai mult sau mai puțin.

f) Știind că Mircea a plătit de 7 ori mai puțin decât Mara, stabilește dacă Mircea a cumpărat mai multe sau mai puține pixuri decât Mara și de câte ori a cumpărat mai multe sau mai puține pixuri.

n	4	8	12	6	28	7
p						14
$\frac{p}{n}$						$\frac{14}{7}$

Tabelul 1

‣ Rezolvarea subpunctelor a), b) și c) conduce la un **șir de rapoarte egale**:

$$\frac{8}{4}=\frac{16}{8}=\frac{24}{12}=\frac{12}{6}=\frac{56}{28}=\frac{14}{7}.$$

Fiecare raport din șir are aceeași valoare, $k = 2$, și reprezintă prețul în lei al unui pix. Deci $\frac{p}{n}=2$.

‣ Rezolvarea subpunctelor d), e) și f) arată că dacă una dintre valorile *p* și *n* se mărește sau se micșorează de un număr de ori, cealaltă se mărește sau se micșorează de același număr de ori. Despre *n* (numărul pixurilor) și *p* (prețul în lei al celor *n* pixuri) se spune că sunt două **mărimi direct proporționale**.

Din $\frac{p}{n}=k$ rezultă că $p = k \cdot n$. Numărul *k* se numește **coeficient de proporționalitate**.

Deoarece $\frac{8}{4}=\frac{16}{8}=\frac{24}{12}=\frac{12}{6}=\frac{56}{28}=\frac{14}{7}$, despre numerele 8, 16, 24, 12, 56, 14 se spune că sunt direct proporționale cu numerele 4, 8, 12, 6, 28, respectiv 7.

‣ Oricare ar fi un șir de rapoarte egale, $\frac{a_1}{b_1}=\frac{a_2}{b_2}=\frac{a_3}{b_3}=...=\frac{a_n}{b_n}=k$, fiecare raport este egal cu raportul dintre suma numărătorilor și suma numitorilor:

$$\frac{a_1}{b_1}=\frac{a_2}{b_2}=\frac{a_3}{b_3}=...=\frac{a_n}{b_n}=\frac{a_1+a_2+a_3+...+a_n}{b_1+b_2+b_3+...+b_n}.$$

Pentru a justifica, este suficient să arătăm că raportul dintre suma numărătorilor și suma numitorilor are valoarea *k*. Într-adevăr, din șirul de rapoarte egale rezultă: $a_1 = k \cdot b_1$, $a_2 = k \cdot b_2$, $a_3 = k \cdot b_3$, ..., $a_n = k \cdot b_n$. Atunci: $\frac{a_1+a_2+a_3+...+a_n}{b_1+b_2+b_3+...+b_n}=\frac{k\cdot b_1+k\cdot b_2+k\cdot b_3+...+k\cdot b_n}{b_1+b_2+b_3+...+b_n}=\frac{k\cdot(b_1+b_2+b_3+...+b_n)}{b_1+b_2+b_3+...+b_n}=k.$

Reține!

- Două mărimi se numesc **direct proporționale** dacă depind una de alta, astfel încât atunci când măsura uneia se mărește (sau se micșorează) de un număr de ori, măsura celeilalte se mărește (sau se micșorează) de același număr de ori.
- Două mărimi sunt **direct proporționale** dacă există un număr $k \neq 0$, astfel încât oricare ar fi a și b măsuri corespunzătoare ale celor două mărimi, rezultă că $a = k \cdot b$. Numărul k se numește **coeficient de proporționalitate**.
- Două sau mai multe numere $a_1, a_2, a_3, ..., a_n$ sunt direct proporționale respectiv cu numerele $b_1, b_2, b_3, ..., b_n$, dacă formează șirul de rapoarte egale: $\frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2} = \frac{a_3}{b_3} = ... = \frac{a_n}{b_n}$.
- Oricare ar fi un șir de rapoarte egale, fiecare raport este egal cu raportul dintre suma numărătorilor și suma numitorilor: $\frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2} = \frac{a_3}{b_3} = ... = \frac{a_n}{b_n} = \frac{a_1 + a_2 + a_3 + ... + a_n}{b_1 + b_2 + b_3 + ... + b_n}$.

Aplicăm cunoștințele

Delia vinde buchete de trandafiri, prețul fiecărui buchet fiind proporțional cu numărul de trandafiri din buchet. Un buchet format din 3 trandafiri costă 22,50 lei. Calculează prețul unui buchet format din:

a) 5 trandafiri; **b)** 7 trandafiri; **c)** 9 trandafiri; **d)** 11 trandafiri.

Rezolvare: Pentru a calcula prețul buchetelor de trandafiri, calculăm prețul unui trandafir, apoi completăm un tabel. Prețul unui trandafir este 22,50 : 3 = 7,50 (lei).

numărul de trandafiri	1	3	5	7	9
prețul (în lei)	7,50	22,50	37,50	52,50	67,50

$\times 7{,}5$

Coeficientul de proporționalitate este 7,5. Numerele din linia a doua a tabelului se obțin înmulțind numerele din prima linie cu coeficientul de proporționalitate.

Exersează, fixează și aprofundează cunoștințele

1. La un centru de închiriat biciclete se poate vedea afișul alăturat.

a) Se poate spune că prețul de închiriere este direct proporțional cu timpul pentru care se face închirierea? Justifică răspunsul.

b) Calculează procentul de reducere a prețului pentru persoana care, în locul a două închirieri succesive de câte o oră fiecare, închiriază o bicicletă pentru două ore.

2. Media aritmetică a trei numere este egală cu 16. Calculează cele trei numere, știind că sunt direct proporționale cu numerele 4, 5 și 7.

3. Determină numerele x, y, z, știind că sunt direct proporționale cu numerele 2, 5, respectiv 7, iar produsul lor este 560.

4. Lucrați în echipă

a) Folosiți rigla gradată și desenați un segment AB cu lungimea de 5 cm.

b) Efectuând calculele necesare, împărțiți segmentul AB în trei segmente, astfel încât lungimile acestora să fie direct proporționale cu numerele 2, 3, 5.

c) Scrieți coeficientul de proporționalitate și lungimile celor trei segmente.

5. Pentru a pregăti un aperitiv din pește pentru 4 persoane se folosesc ingrediente în cantitățile menționate în rețetă.

a) Calculează coeficientul de proporționalitate pentru fiecare ingredient.
b) Calculează cantitățile necesare pentru 8 persoane și pentru 6 persoane.

6. Suma numerelor a, b, c și d este egală cu 110. Calculează suma numerelor x, y, z și t, știind că $\frac{x}{a}=5$ și $\frac{x}{a}=\frac{y}{b}=\frac{z}{c}=\frac{t}{d}$.

7. Numerele a, b, c, d, e sunt direct proporționale cu numerele x, y, z, t, respectiv u, iar $x = 10 \cdot a$.

a) Determină coeficientul de proporționalitate.

b) Arată că numărul $\frac{y^2}{b^2} - 2\cdot\frac{x+y+z+t+u}{a+b+c+d+e} + 1$ este un număr natural pătrat perfect.

8. *Greutatea unui corp*, notată cu G, este o mărime fizică direct proporțională cu *masa corpului*, notată cu m. Coeficientul de proporționalitate, notat cu g, este *accelerația gravitațională a Pământului*.

a) Scrie relația dintre cele trei mărimi fizice.

b) Știind că unitățile de măsură pentru cele trei mărimi fizice G, g și m sunt *newtonul* (N), *metrul pe secundă la pătrat* (m/s²) și, respectiv, *kilogramul* (kg), iar $g = 9{,}8$ m/s², copiază și completează tabelul alăturat.

masa (în kg)	0,5	2	2,5	3	10
greutatea (în N)					

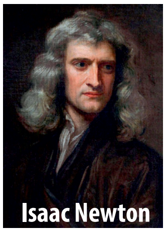
× ?

c) Calculează masa unui corp cu greutatea de 68,6 N.

Știai că...

O altă unitate de măsură pentru greutatea unui corp este *kilogramul forță* (kgf). Legătura dintre *newton* și *kilogramul forță* este următoarea: 9,8 N = 1 kgf.

Dacă masa unui corp este egală cu 1 kg, deoarece $G = m \cdot g$, greutatea corpului este egală cu $1 \cdot 9{,}8 = 9{,}8$ (newtoni). Dar 9,8 N = 1 kgf. Prin urmare, un corp cu masa de 1 kg are greutatea de 1 kgf. Așa se explică confuzia dintre *masă* și *greutate*, însă aceste două mărimi fizice sunt total diferite.


Isaac Newton

AUTOEVALUARE

1. Stabilește valoarea de adevăr a afirmațiilor. **3 puncte**

a) Numerele 2, 3, 5 sunt direct proporționale cu numerele 4, 6, respectiv 10. **A F**
b) Numerele 2, 3, 5 sunt direct proporționale cu numerele 2^2, 3^2, respectiv 5^2. **A F**
c) Numerele 2, 3, 5 sunt direct proporționale cu numerele 0,5, 0,75, respectiv 1,25. **A F**

2. Unește, prin săgeți, fiecare enunț aflat în coloana din stânga cu răspunsul corespunzător aflat în coloana din dreapta. **4,5 puncte**

Numerele x, y, z, t sunt direct proporționale cu numerele $\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{5}$, respectiv $\frac{1}{7}$. Dacă $x = 105$, atunci:

a) y este egal cu ...	**1)** 52;
b) z este egal cu ...	**2)** 30;
c) t este egal cu ...	**3)** 42;
	4) 70.

3. Completează caseta cu răspunsul corect. **1,5 puncte**

Dacă numerele a, b, c sunt direct proporționale cu numerele x, y, respectiv z, iar $3 \cdot x = 2 \cdot a$, atunci valoarea raportului numeric $\frac{a+b+c}{x+y+z}$ este egală cu $\boxed{}$.

Din oficiu: 1 punct

II.2.2. Mărimi invers proporționale

Rezolvăm, observăm și descoperim cunoștințe noi

Patru robinete de același tip umplu un rezervor în 4 ore.

a) În cât timp este umplut rezervorul de două robinete de același tip?

b) Dacă se notează cu n numărul de robinete și cu t timpul în care este umplut rezervorul de cele n robinete, copiază și completează tabelul 1.

n	1	2	4	8	16	32
t			4			

Tabelul 1

Rezolvare: **a)** Timpul necesar unui singur robinet să umple rezervorul este de 4 ori mai mare decât timpul necesar unui număr de 4 robinete să umple același rezervor. Prin urmare, un robinet umple rezervorul în $4 \cdot 4 = 16$ (ore). Rezultă că timpul necesar unui număr de două robinete să umple rezervorul este de două ori mai mic decât timpul de umplere necesar unui singur robinet, adică este egal cu $16 : 2 = 8$ (ore).

b) Deoarece timpul necesar unui singur robinet să umple rezervorul este de 16 ore, rezultă că timpul t necesar unui număr de n robinete pentru a umple rezervorul este de n ori mai mic decât timpul de umplere necesar unui singur robinet, adică $t = 16 : n$ (ore). Atunci:

$n = 1 \Rightarrow t = 16 : 1 = 16$; $\quad n = 2 \Rightarrow t = 16 : 2 = 8$;

$n = 4 \Rightarrow t = 16 : 4 = 4$; $\quad n = 8 \Rightarrow t = 16 : 8 = 2$;

$n = 16 \Rightarrow t = 16 : 16 = 1$; $\quad n = 32 \Rightarrow t = 16 : 32 = 0{,}5$.

Rezultă tabelul alăturat.

n	1	2	**4**	8	16	32
t	16	8	**4**	2	1	0,5

Problema anterioară pune în evidență două mărimi fizice: *numărul de robinete,* notat cu n, și *timpul* t necesar celor n robinete pentru a umple rezervorul. Observăm că între valorile celor două mărimi există relația $t = 16 : n$ sau $n \cdot t = 16$, unde 16 este numărul de ore în care un robinet umple rezervorul.

Observăm că *dacă numărul de robinete se mărește* (*sau se micșorează*) *de un număr de ori, atunci timpul de umplere se micșorează* (*sau se mărește*) *de același număr de ori.* De exemplu, pentru $n = 4$ avem $t = 4$:

- dacă *n se mărește de* 4 ori, adică $n = 4 \cdot 4 = 16$, atunci *t se micșorează de* 4 ori, adică $t = 4 : 4 = 1$.
- dacă *n se micșorează de două ori* ($n = 4 : 2 = 2$), atunci *t se mărește de două ori* ($t = 4 \cdot 2 = 8$).

Despre cele două mărimi n și t se spune că sunt **mărimi invers proporționale**.

Despre numerele 1, 2, 4, 8, 16, 32 se spune că sunt **invers proporționale** cu numerele 16, 8, 4, 2, 1, respectiv 0,5, deoarece $1 \cdot 16 = 2 \cdot 8 = 4 \cdot 4 = 8 \cdot 2 = 16 \cdot 1 = 32 \cdot 0{,}5$.

Reține!

- Două mărimi se numesc **mărimi invers proporționale** dacă depind una de alta, astfel încât atunci când măsura uneia se mărește (sau se micșorează) de un număr de ori, măsura celeilalte se micșorează (sau se mărește) de același număr de ori.

  Dacă două mărimi sunt **invers proporționale**, atunci există un număr $k \neq 0$, astfel încât, oricare ar fi a și b două măsuri corespunzătoare celor două mărimi, rezultă că $a \cdot b = k$.
- Două sau mai multe numere $a_1, a_2, a_3, ..., a_n$ sunt invers proporționale respectiv cu numerele $b_1, b_2, b_3, ..., b_n$, dacă $a_1b_1 = a_2b_2 = a_3b_3 = ... = a_nb_n = k$, unde $k \neq 0$.

Observație: Două sau mai multe numere $a_1, a_2, a_3, ..., a_n$ sunt invers proporționale respectiv cu numerele $b_1, b_2, b_3, ..., b_n$, dacă sunt direct proporționale cu numerele $\frac{1}{b_1}, \frac{1}{b_2}, \frac{1}{b_3}, ...,$ respectiv $\frac{1}{b_n}$, adică:

$$\frac{a_1}{\frac{1}{b_1}} = \frac{a_2}{\frac{1}{b_2}} = \frac{a_3}{\frac{1}{b_3}} = ... = \frac{a_n}{\frac{1}{b_n}} = k.$$

Aplicăm cunoștințele

1. Se știe că $n \cdot t = 63$, unde cu t s-a notat numărul de ore în care n tractoare ară o suprafață agricolă S.

a) Ce reprezintă numărul 63?

b) Calculează în cât timp ară suprafața respectivă 3 tractoare.

c) Câte tractoare sunt necesare pentru a ara suprafața agricolă în 9 ore?

Rezolvare: **a)** Având în vedere enunțul, deducem că mărimile n și t sunt invers proporționale, iar numărul 63 poate fi interpretat în două feluri:

– dacă $t = 1$, din egalitatea $n \cdot t = 63$ rezultă că $n = 63$. Deci 63 reprezintă numărul de tractoare care sunt necesare pentru a ara suprafața agricolă într-o oră ($t = 1$);

– dacă $n = 1$, din egalitatea $n \cdot t = 63$ rezultă că $t = 63$. Deci 63 reprezintă numărul de ore care sunt necesare unui tractor ($n = 1$) pentru a ara suprafața agricolă.

b) Dacă $n = 3$, din egalitatea $n \cdot t = 63$ rezultă că $3 \cdot t = 63$, de unde $t = 21$. Prin urmare, timpul necesar unui număr de 3 tractoare pentru a ara suprafața agricolă S este egal cu 21 de ore.

c) Dacă $t = 9$, din egalitatea $n \cdot t = 63$ rezultă că $n \cdot 9 = 63$, de unde $n = 7$. Prin urmare, pentru a ara suprafața agricolă în 9 ore sunt necesare 7 tractoare.

2. Un segment AB are lungimea egală cu 8 cm. Punctele P și Q aparțin segmentului AB și sunt luate astfel încât Q să se afle între P și B.

a) Calculează lungimile segmentelor AP, PQ, QB, știind că acestea sunt invers proporționale cu numerele 2, 5, respectiv 10.

b) Folosește rigla gradată și desenează punctele A, B, P și Q, astfel încât să fie respectat enunțul.

Rezolvare: **a)** Notăm $AP = a$ cm, $PQ = b$ cm și $QB = c$ cm. Deoarece a, b, c sunt invers proporționale cu numerele 2, 5, respectiv 10, putem scrie: $a \cdot 2 = b \cdot 5 = c \cdot 10 = k$. Atunci:

$a \cdot 2 = k \Rightarrow a = \dfrac{k}{2}$, $b \cdot 5 = k \Rightarrow b = \dfrac{k}{5}$ și $c \cdot 10 = k \Rightarrow c = \dfrac{k}{10}$. Cum $a + b + c = 8$, rezultă $\dfrac{k}{2} + \dfrac{k}{5} + \dfrac{k}{10} = 8$. Aducând la același numitor rezultă $\dfrac{5k}{10} + \dfrac{2k}{10} + \dfrac{k}{10} = 8$ sau $\dfrac{8k}{10} = 8$, de unde $k = 10$. Prin urmare, $a = \dfrac{k}{2} = \dfrac{10}{2} = 5$, $b = \dfrac{k}{5} = \dfrac{10}{5} = 2$, $c = \dfrac{k}{10} = \dfrac{10}{10} = 1$. Rezultă că $AP = 5$ cm, $PQ = 2$ cm și $QB = 1$ cm.

b) Desenul este cel din figura 1.

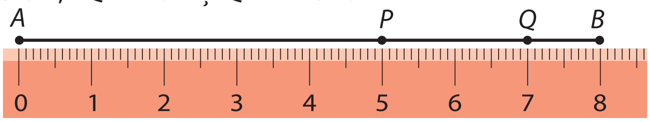


Fig. 1

Exersează, fixează și aprofundează cunoștințele

1. Pentru a stimula reducerea consumului de energie electrică în rândul populației prin folosirea becurilor economice, un magazin a decis ca prețul unui tip de becuri să fie invers proporțional cu numărul de becuri cumpărate. Copiază, calculează și completează tabelul următor:

n (numărul de becuri)	1	2	4	7	14	28
p (prețul în lei)			7			

2. Numerele x, y, z sunt invers proporționale cu numerele 4, 5, respectiv 10. Determină numerele x, y și z, știind că: **a)** suma lor este egală cu 22; **b)** produsul lor este egal cu 40.

3. Determină numerele x și y, știind că sunt invers proporționale cu 3, respectiv 2,(4) și că media lor aritmetică este 294.

4. Trei copii cu vârstele de 7 ani, 9 ani, respectiv 12 ani au mers la colindat și au fost răsplătiți cu covrigi, nuci, mere, portocale și bani. Ioana, cea mai mare dintre ei, elevă în clasa a VI-a, a hotărât ca suma de 1700 de lei pe care au primit-o să fie împărțită în părți invers proporționale cu vârstele.

a) Fără a efectua vreun calcul, precizează care copil va primi cea mai mare sumă de bani. Justifică răspunsul.

b) Calculează câți lei primește fiecare copil.

5. Elementele unei mulțimi *M* sunt numere naturale de forma $\overline{abc}$, unde cifrele *a* și *c* sunt invers proporționale cu numerele 0,2, respectiv 0,125. Scrie mulțimea *M* prin enumerarea elementelor.

6. Numerele *x*, *y*, *z* sunt invers proporționale cu 4, 2, respectiv 1,(3). Numerele *z*, *t* sunt direct proporționale cu numerele 2,5, respectiv 5. Demonstrează că produsul $x \cdot y \cdot z \cdot t$ este pătratul unui număr.

7. O echipă formată din 10 muncitori poate termina o lucrare în 20 de zile. După ce echipa lucrează 10 zile, 6 muncitori sunt trimiși să lucreze în altă parte. În cât timp vor termina lucrarea muncitorii rămași?

8. Se știe că 8 tractoare ară jumătate dintr-un lot în 14 zile. După aceea, se alătură celor 8 tractoare alte 6 tractoare și, astfel, este arat tot lotul. Calculează cu cât este mai mic timpul în care a fost terminată lucrarea în aceste condiții față de situația în care ar fi lucrat numai cele 8 tractoare.

AUTOEVALUARE

10 min

1. Stabilește valoarea de adevăr a afirmațiilor. **3 puncte**

a) Numerele 2, 3, 5 sunt invers proporționale cu numerele 15, 10, respectiv 6. **A F**

b) Numerele 2, 3, 5 sunt invers proporționale cu numerele 10, 20, respectiv 60. **A F**

c) Numerele 2, 3, 5 sunt invers proporționale cu numerele $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, respectiv $\frac{1}{5}$. **A F**

2. Unește, prin săgeți, fiecare enunț aflat în coloana din stânga cu răspunsul corespunzător aflat în coloana din dreapta. **4,5 puncte**

Numerele *x*, *y*, *z*, *t* sunt invers proporționale cu numerele 4, 6, 10, respectiv 14. Dacă $x = 105$, atunci:

a) *y* este egal cu ...	**1)** 32;
b) *z* este egal cu ...	**2)** 30;
c) *t* este egal cu ...	**3)** 42;
	4) 70.

3. Completează caseta cu răspunsul corect. **1,5 puncte**

Dacă un număr natural de trei cifre este divizibil cu 9, iar cifra sutelor și cifra unităților sunt invers proporționale cu 0,25, respectiv 0,4, atunci numărul este ☐. **Din oficiu: 1 punct**

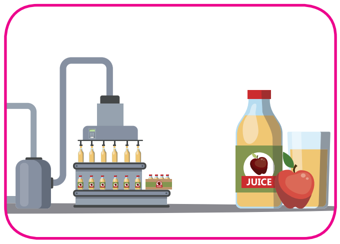
II.2.3. REGULA DE TREI SIMPLĂ

Rezolvăm împreună

1. Scuterul lui Sergiu consumă 1,8 litri de carburant pentru a parcurge 50 de kilometri. Calculează cantitatea de carburant de care are nevoie Sergiu pentru a parcurge 75 de kilometri.

Rezolvare: Notăm cu *x* cantitatea de carburant necesară lui Sergiu pentru a parcurge cei 75 km. *Admițând că necesarul de carburant*, exprimat în litri, *este o mărime fizică direct proporțională cu distanța parcursă*, exprimată în kilometri, rezultă că numerele 1,8 și 50 sunt direct proporționale cu numerele *x*, respectiv 75. Prin urmare, $\frac{1,8}{x} = \frac{50}{75}$, de unde $x = \frac{1,8 \cdot 75}{50} = 2,7$ (litri).

2. O întreprindere familială produce sucuri naturale din fructe, pe care le îmbuteliază în sticle cu ajutorul unor dozatoare semiautomate, de același fel, care funcționează simultan. Folosind 6 dozatoare, o cantitate de sucuri, notată cu *C*, este îmbuteliată în 8 ore. De câte dozatoare ar fi nevoie pentru a îmbutelia cantitatea *C* de sucuri în 3 ore?



Rezolvare:

Notăm cu x numărul de dozatoare necesare pentru a îmbutelia cantitatea *C* de sucuri în 3 ore. Deoarece numărul de dozatoare este invers proporțional cu timpul de îmbuteliere, rezultă că numerele 6 și 8 sunt invers proporționale cu numerele x, respectiv 3. Prin urmare, $6 \cdot 8 = x \cdot 3$, de unde $x = \frac{6 \cdot 8}{3}$. Rezultă că $x = 16$, deci este nevoie de 16 dozatoare pentru a îmbutelia cantitatea *C* de sucuri în 3 ore.

Observăm și descoperim cunoștințe noi

- În cazul problemei 1, pentru a calcula valoarea lui x, aranjăm datele problemei în felul următor:

$$\begin{array}{lcl} 1{,}8\ \ell & \xrightarrow{d.p.} & 50\text{ km} \\ x\ \ell & \dots & 75\text{ km} \end{array}$$

$$\Rightarrow x = \frac{1{,}8 \cdot 75}{50} \Rightarrow x = 2{,}7.$$

Această modalitate de calcul este cunoscută sub denumirea de **regula de trei simplă pentru mărimi direct proporționale** (*d.p.*).

- În cazul problemei 2, pentru a calcula valoarea lui x, aranjăm datele problemei în felul următor:

$$\begin{array}{lcl} 6\text{ dozatoare} & \xleftrightarrow{i.p.} & 8\text{ ore} \\ x\text{ dozatoare} & \dots & 3\text{ ore} \end{array}$$

$$\Rightarrow x = \frac{6 \cdot 8}{3} \Rightarrow x = 16.$$

Această modalitate de calcul este cunoscută sub numele de **regula de trei simplă pentru mărimi invers proporționale** (*i.p.*).

Reține!

- **Regula de trei simplă** este procedeul folosit pentru a calcula o valoare a unei mărimi fizice, în cazul în care aceasta este direct proporțională sau invers proporțională cu altă mărime fizică.

Aplicăm cunoștințele

1. Vlad este ajutor de bucătar la un restaurant. Aici, el a învățat să gătească mâncăruri delicioase. Într-o duminică, Vlad a decis să pregătească o astfel de mâncare pentru familia lui, care numără șapte persoane. El și-a amintit ingredientele și cantitățile necesare pentru două persoane:

- 250 g de mușchiuleț de porc;
- 30 g de unt;
- 14 ciuperci mici;
- 3 linguri de smântână.

Calculează cantitățile de ingrediente pentru 7 persoane.

Rezolvare: Aplicăm regula de trei simplă pentru mărimi direct proporționale:

$$\begin{array}{lcl} 250\text{ g mușchiuleț} & \xrightarrow{d.p.} & 2\text{ persoane} \\ x\text{ g mușchiuleț} & \dots & 7\text{ persoane} \end{array}$$

$$\Rightarrow x = \frac{7 \cdot 250}{2} \Rightarrow x = 875 \text{ (g mușchiuleț);}$$

Rezultă că pentru 7 persoane sunt necesare 875 g de mușchiuleț. Analog, rezultă celelalte cantități de ingrediente necesare: 49 ciuperci mici, 106 g de unt și 10,5 linguri de smântână.

2. Pentru a lichida un stoc de alimente, cu câteva zile înainte de expirarea termenului de valabilitate a acestora, conducerea supermarketului hotărăște ca prețurile să devină invers proporționale cu cantitățile de alimente. Un cumpărător plătește 120 de lei pentru 8 kg de alimente. Cât ar plăti dacă ar cumpăra 30 kg de alimente?

Rezolvare: Deoarece prețurile sunt invers proporționale cu cantitățile de alimente, aplicăm regula de trei simplă pentru mărimi invers proporționale. Deci, pentru 30 kg de alimente, cumpărătorul va plăti 32 de lei.

i.p.

8 kg ←.................→ 120 de lei

30 kg .... x lei

$$\Rightarrow x = \frac{8 \cdot 120}{30} \Rightarrow x = 32 \text{ (lei)}.$$

Exersează, fixează și aprofundează cunoștințele

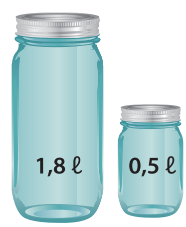
1. Este evident că înălțimea unui copil depinde de vârsta pe care o are și că, pe măsură ce vârsta copilului se mărește, se mărește și înălțimea acestuia. Dacă la vârsta de 10 ani copilul are înălțimea de 1,50 m, poți calcula înălțimea acestuia la 14 ani, folosind regula de trei simplă? Justifică răspunsul.

2. Trei litri de lapte costă 19,50 lei. Calculează cât costă șapte litri de lapte:
a) folosind metoda reducerii la unitate; **b)** folosind regula de trei simplă.

3. Un magazin vinde pixuri la bucată sau seturi de câte 60 de pixuri. Pentru două pixuri cumpărate la bucată s-au plătit 3 lei, iar pentru două seturi s-au plătit 144 de lei.
a) Numește cele două modalități prin care un cumpărător poate cumpăra pixuri din magazin.
b) Stabilește mărimile direct proporționale. Justifică răspunsul.
c) Calculează prețul plătit pentru 7 pixuri cumpărate la bucată.
d) Calculează prețul plătit pentru 3 seturi de pixuri cumpărate.

4. Calculează numărul de muncitori necesari pentru a termina o lucrare în 6 ore, știind că 12 muncitori termină lucrarea în 8 ore.

5. **Activitate în perechi.** Un bazin este umplut prin 4 robinete în 9 ore. Știind că robinetele au același debit, calculați de câte robinete este nevoie pentru a umple bazinul în 6 ore, în două moduri:
a) folosind metoda reducerii la unitate;
b) folosind regula de trei simplă.



6. **Activitate în perechi.** Pentru a conserva zacusca pregătită pentru iarnă, la o cantină școlară s-au folosit 90 de borcane de 0,5 litri. Calculați în două moduri necesarul de borcane, în cazul în care zacusca ar fi fost conservată în borcane de 1,8 litri:
a) folosind regula de trei simplă;
b) calculând mai întâi cantitatea totală de zacuscă, exprimată în litri.

7. Într-un desen, lungimea segmentelor este direct proporțională cu lungimea reală a segmentelor, iar unul dintre segmentele desenului, care are lungimea de 0,5 cm, are în realitate 1 m.
a) Calculează în centimetri lungimile din desen ale segmentelor care au următoarele lungimi reale: 9 m, 4 dam, 45 dm.
b) În desenul respectiv sunt reprezentate segmentele AB, BC și CA. Dacă $AB = 6$ cm, $BC = 55$ mm și $CA = 1$ dm, calculează în metri lungimile reale ale acestor segmente.
c) Calculează scara desenului.

8. Stând în echilibru într-un picior și cu genunchiul celuilalt picior ridicat, Alex face sărituri de 35 de centimetri și parcurge distanța de 2,8 metri în 24 de secunde. Dacă săritura ar fi fost de 40 cm și timpul în care face această săritură este același cu timpul în care face săritura de 35 cm, calculează în cât timp ar fi parcurs Alex:
a) aceeași distanță; **b)** 3,6 metri.

AUTOEVALUARE

10 min

1. Încercuiește litera corespunzătoare răspunsului corect. **3 puncte**

Cele două scheme alăturate reprezintă regulile de trei simplă prin care se calculează numerele x și y.

1

5 10
d.p.
15 x

2

i.p.
6 3
9 .... y

a) Conform schemei **1**, numărul x este egal cu:

A. 3,(3); **B.** 30;
C. 7,5; **D.** 15.

b) Conform schemei **2**, numărul y este egal cu:

A. 18; **B.** 4,5;
C. 2; **D.** 5.

2. Unește, prin săgeți, fiecare enunț aflat în coloana din stânga cu răspunsul corespunzător aflat în coloana din dreapta. **3 puncte**

Un autobuz parcurge în fiecare zi pe autostradă un traseu cu lungimea de 420 km.

a) Dacă traseul este parcurs în 6 ore, atunci viteza medie este de ...
b) Dacă traseul este parcurs în 4 ore, atunci viteza medie este de ...
c) Dacă traseul este parcurs în 7 ore, atunci viteza medie este de ...

1) 105 km/h;
2) 70 km/h;
3) 120 km/h;
4) 60 km/h.

3. Completează caseta cu răspunsul corect. **3 puncte**

Dacă o anumită cantitate de sirop este îmbuteliată în 20 de sticle de 1,5 litri fiecare, atunci numărul de sticle de 2 litri necesare îmbutelierii aceleiași cantități de sirop este egal cu $\boxed{}$.

Din oficiu: 1 punct

Exerciții și probleme recapitulative

1. Un angajat câștigă 1125 de lei în 5 zile. Cât câștigă angajatul în 8 zile, având același ritm de muncă?

2. Determină numerele x și y, știind că sunt direct proporționale cu numerele 4 și 15, iar $3y - 7x = 51$.

3. Ce procent reprezintă numărul a din numărul b, dacă a și b sunt direct proporționale cu 28 și 35?

4. Știind că $\frac{x}{a} = \frac{y}{b} = \frac{z}{c} = \frac{2}{5}$, calculează valoarea raportului $\frac{3x+5y+7z}{3a+5b+7c}$.

5. Determină numerele x, y și z din șirul de rapoarte $\frac{x}{3} = \frac{y}{7} = \frac{z}{11}$, știind că $2x + 3y + z = 76$.

6. Știind că $\frac{a}{x} = \frac{b}{y} = \frac{c}{z}$ și $\frac{x}{a} = 5$, calculează: **a)** $\frac{a+b+c}{x+y+z}$; **b)** $\frac{a^2+b^2+c^2}{x^2+y^2+z^2}$; **c)** $\frac{2a+3b+5c}{2x+3y+5z}$.

7. Știind că $\frac{a}{x} = \frac{b}{y} = \frac{c}{z} = \frac{d}{t} = 11$, calculează $21 - \frac{a+b+c+d}{x+y+z+t}$.

8. Suma de 700 de lei se împarte în două părți invers proporționale cu numerele 2 și 5. Calculează cele două numere.

9. Determină numerele x și y, știind că sunt invers proporționale cu 3 și 5, iar diferența lor este 14.

10. Calculează valoarea raportului $\frac{3x+2y}{5x-7y}$, știind că numerele x și y sunt invers proporționale cu 7 și 11.

11. Numerele a, 5, 7 sunt direct proporționale cu 36, b, respectiv 84. Calculează $2a + b$ și $2b - a$.

12. Pentru a realiza o lucrare într-o zi este nevoie de 12 muncitori. Calculează de câți muncitori este nevoie pentru a realiza lucrarea în: **a)** 2 zile; **b)** 3 zile; **c)** 4 zile; **d)** 6 zile.

13. Pentru 7 eșarfe se plătesc 196 de lei. Calculează cât costă: **a)** 5 eșarfe; **b)** 15 eșarfe.

EVALUARE

Timp de lucru: 50 de minute.

Subiectul I. Dacă apreciezi că afirmația este adevărată, completează căsuța alăturată cu litera A. În caz contrar, completează cu litera F.

(5p) **1.** Dacă a și b sunt două numere direct proporționale cu 2 și 3, iar suma lor este 45, atunci diferența numerelor este 9. ☐

(5p) **2.** Dacă x și y sunt două numere invers proporționale cu 2 și 3, iar suma lor este 30, atunci diferența lor este 6. ☐

(5p) **3.** Dacă măsurile a două unghiuri complementare sunt direct proporționale cu 4 și 11, atunci măsura celui mai mic dintre unghiuri este egală cu 18°. ☐

(5p) **4.** Dacă măsurile a două unghiuri suplementare sunt invers proporționale cu 7 și 11, atunci măsura celui mai mare dintre unghiuri este egală cu 110°. ☐

Subiectul II. Unește, prin săgeți, fiecare cifră corespunzătoare enunțurilor din coloana **A**, cu litera care indică răspunsul corect aflat în coloana **B**.

	A	B
(5p)	**1.** Dacă $\frac{a}{3}=\frac{b}{5}=\frac{c}{7}=8$, atunci suma $a+b+c$ este egală cu ...	**a)** 56;
(5p)	**2.** Dacă numerele 2 și 14 sunt direct proporționale cu numerele 8 și x, atunci x este egal cu ...	**b)** 20;
(5p)	**3.** Dacă numerele 108 și 72 sunt invers proporționale cu numerele 2 și y, atunci y este egal cu ...	**c)** 3;
(5p)	**4.** Dacă 7 caiete identice costă 31,50 lei, atunci valoarea în lei a 5 caiete identice cu primele este ...	**d)** 120;
		e) 22,5.

Subiectul III. La cerințele următoare alege litera care indică singura variantă corectă.

(5p) **1.** Tudor poate cumpăra cu banii pe care îi are 8 cărți, toate având același preț. Dacă prețul cărților s-ar dubla, Tudor ar putea cumpăra:

A. 16 cărți; **B.** 4 cărți; **C.** 6 cărți; **D.** 2 cărți.

(5p) **2.** O lucrare este realizată de 4 muncitori în 12 zile. Șase muncitori ar realiza aceeași lucrare în:

A. 10 zile; **B.** 8 zile; **C.** 6 zile; **D.** 4 zile.

(5p) **3.** Împărțim numărul 180 în părți direct proporționale cu numerele 2, 3 și 5. Cel mai mare dintre numere este:

A. 54; **B.** 75; **C.** 120; **D.** 90.

(5p) **4.** Dacă $\frac{a}{x}=\frac{b}{y}=\frac{c}{z}=\frac{2}{7}$, $x, y, z \neq 0$, atunci rezultatul calculului $7\cdot\frac{a+b+c}{x+y+z}-2$ este:

A. 1; **B.** 2; **C.** 0; **D.** 7.

La subiectul IV scrie rezolvarea completă.

Subiectul IV. Numerele a, b și c sunt direct proporționale cu 2, 3, respectiv 5, iar produsul lor este 1920.

(15p) **a)** Calculează numerele a, b și c.

(15p) **b)** Verifică dacă $a+b=c$.

Se acordă 10 puncte din oficiu. Nota se obține împărțind punctajul final la 10.

Subiectul	I.1	I.2	I.3	I.4	II.1	II.2	II.3	II.4	III.1	III.2	III.3	III.4	IV.a	IV.b
Punctajul														
Nota														

II.3. ORGANIZAREA DATELOR ȘI PROBABILITĂȚI

II.3.1. ELEMENTE DE ORGANIZARE A DATELOR. REPREZENTAREA DATELOR PRIN GRAFICE ÎN CONTEXTUL PROPORȚIONALITĂȚII

În studiul unor fenomene (naturale, științifice, sociale, economice) apar probleme legate de analizarea și sistematizarea datelor privitoare la fenomenele cercetate, cu scopul de a emite concluzii bazate pe aceste analize, necesare inclusiv pentru anumite previzionări. Veți înțelege mai bine analizând și rezolvând probleme specifice.

Rezolvăm împreună

Radu și-a propus să monitorizeze temperatura de afară timp de o săptămână. În caietul lui a desenat tabelul de mai jos, în care va nota zilnic valorile temperaturilor măsurate în grade Celsius.

Ziua	**L**	**M**	**M**	**J**	**V**	**S**	**D**
Temperatura (în °C)	6	10	8				

a) Care au fost temperaturile notate de Radu în primele trei zile ale săptămânii?

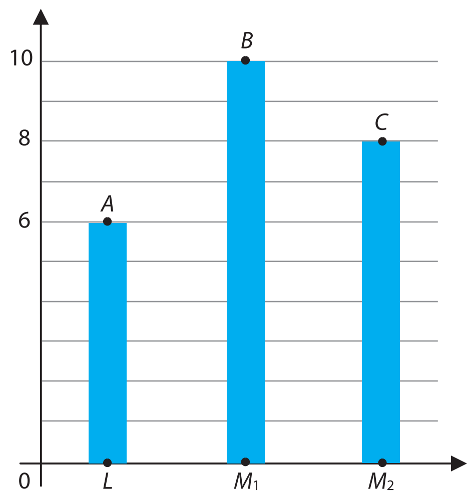
b) Pentru a observa mai bine evoluția temperaturii, Radu a realizat un desen în felul următor:

– a desenat două axe perpendiculare, cu originea comună;

– pe axa verticală a reprezentat numerele 0, 6, 8 și 10, având grijă ca distanțele dintre subdiviziuni să fie egale;

– pe axa orizontală a desenat trei puncte care evidențiază zilele săptămânii, L, M_1, M_2, având grijă ca distanțele între cele trei puncte să fie egale.

– în final, a desenat trei dreptunghiuri care au aceeași lățime și lungimile LA, M_1B, M_2C exprimate în centimetri *direct proporționale cu temperaturile* exprimate în grade Celsius.



Desenul realizat de Radu este o *diagramă*, numită **diagramă de tip coloană**.

Calculează lungimile M_1B și M_2C, știind că segmentul LA desenat de Radu are lungimea de 3 cm.

Rezolvare:

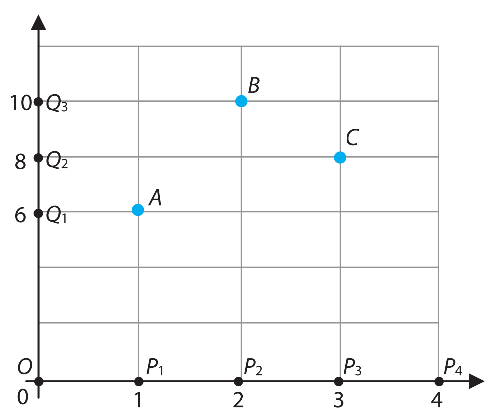
a) Din tabelul lui Radu rezultă că s-au înregistrat următoarele temperaturi: luni 6°C, marți 10°C și miercuri 8°C.

b) Notăm $M_1B = x$ cm și $M_2C = y$ cm. Din enunț, $LA = 3$ cm și numerele 3, x, y sunt direct proporționale cu 6, 10, respectiv 8; rezultă că $\frac{3}{6} = \frac{x}{10} = \frac{y}{8}$, de unde $x = 5$ cm și $y = 4$ cm.

2. Ioana, vecină și colegă de clasă cu Radu, a monitorizat și ea temperaturile din cursul săptămânii, dar a preferat să noteze zilele cu numerele 1, 2, 3, 4, 5, 6 și 7.

a) Desenează și completează în caietul tău tabelul Ioanei.

b) Pe baza tabelului, Ioana a realizat în caiet desenul alăturat, care este tot o diagramă, numită **diagramă prin puncte**. Ea și-a mai notat că axa orizontală este axa absciselor, iar axa verticală este axa ordonatelor.



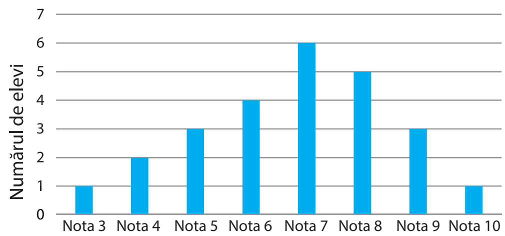
Ce reprezintă numerele plasate de Ioana pe axa absciselor? Dar numerele reprezentate pe axa ordonatelor?

c) Despre punctul A, Ioana spune că are coordonatele 1 și 6 și că 1 este abscisa, iar 6 este ordonata punctului A. În acest context, care sunt coordonatele punctului B și ce semnificație au?

d) Luând ca unitate de măsură un segment cu lungimea de 2 cm, Ioana a reprezentat pe axa absciselor numerele 0, 1, 2, 3, 4 și punctele ale căror coordonate sunt aceste numere, respectiv punctele O, P_1, P_2, P_3, P_4. Dacă a, b, c, d sunt numere care exprimă lungimile segmentelor OP_1, OP_2, OP_3, OP_4, măsurate în centimetri, arată că a, b, c, d sunt direct proporționale cu 1, 2, 3, 4.

e) Luând ca unitate de măsură un segment cu lungimea de 0,5 cm, Ioana a reprezentat pe axa verticală numerele 6, 8, 10 și punctele ale căror coordonate sunt aceste numere, respectiv punctele Q_1, Q_2, Q_3. Dacă x, y, z sunt numere care exprimă lungimile segmentelor OQ_1, OQ_2, OQ_3, măsurate în centimetri, arată că x, y, z sunt direct proporționale cu 6, 8, 10. Altfel spus, *ordonatele punctelor A, B și C desenate de Ioana sunt direct proporționale cu temperaturile*.

3. Rezultatele obținute de elevii clasei a VI-a, la o probă de evaluare, au fost sistematizate de profesorul clasei și prezentate elevilor prin diagrama alăturată.



a) Câți elevi au fost evaluați cu nota 7? Dar cu nota 9?

b) Prezintă rezultatele evaluării cu ajutorul unui tabel.

c) Dacă coloana care reprezintă numărul de elevi evaluați cu nota 7 are înălțimea de 3 cm, calculează înălțimile coloanelor care reprezintă numărul elevilor evaluați cu nota 8 și numărul elevilor evaluați cu nota 6.

Rezolvare:

a) Coloana a cincea arată că 6 elevi au fost evaluați cu nota 7. Analog, coloana a șaptea arată că 3 elevi au fost evaluați cu nota 9.

b) Rezultă următorul tabel:

Nota	3	4	5	6	7	8	9	10
Numărul de elevi	1	2	3	4	6	5	3	1

c) *Înălțimea unei coloane este direct proporțională cu numărul elevilor.* Prin urmare, înălțimea oricărei coloane se poate calcula cu regula de trei simplă:

3 cm .... 6 elevi
x cm .... 5 elevi

$$\Rightarrow x = \frac{3 \cdot 5}{6} = 2{,}5 \text{ (cm)}.$$

3 cm .... 6 elevi
x cm .... 4 elevi

$$\Rightarrow x = \frac{3 \cdot 4}{6} = 2 \text{ (cm)}.$$

4. Studiază cu atenție diagrama prezentată în exercițiul anterior.

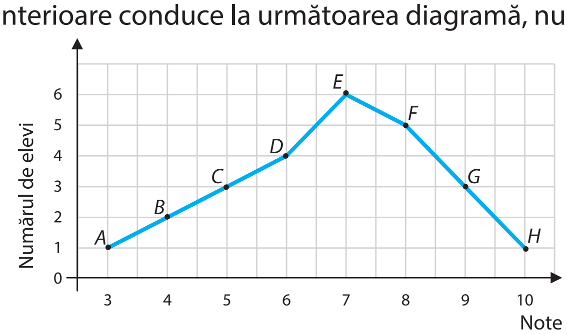
a) Desenează în caietul tău cele două axe: *axa notelor* și *axa numărului de elevi*.

b) Știind că lungimea unui segment între două note consecutive este egală cu 1 cm, reprezintă notele pe *axa notelor*. Desenează prin punctele respective drepte verticale (paralele cu axa numărului de elevi).

c) Reprezintă prin puncte pe *axa numărului de elevi* numerele 1, 2, 3, 4, 5, 6, luând ca unitate de măsură segmentul cu lungimea de 0,5 cm. Desenează prin punctele respective drepte orizontale (paralele cu axa notelor).

d) Notează cu A, B, C, D, E, F, G, H punctele aflate la intersecția dreptelor verticale cu cele orizontale corespunzătoare fiecărei note și trasează segmentele AB, BC, CD, DE, EF, FG și GH.

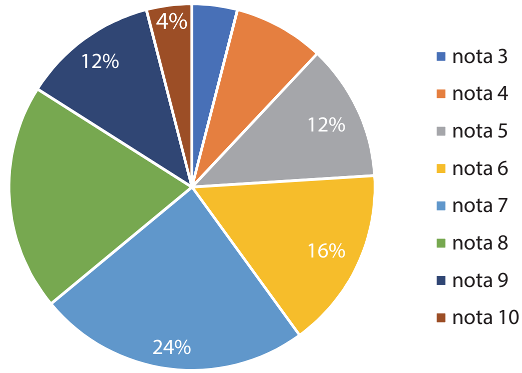
Rezolvarea cerințelor anterioare conduce la următoarea diagramă, numită **diagramă de tip linie**.



5. Profesorul le-a prezentat elevilor analiza rezultatelor la proba de evaluare și prin diagrama alăturată, numită **diagramă circulară**.

a) Observă culoarea notelor. Ce reprezintă 24%?

b) Folosește tabelul de mai jos și regula de trei simplă pentru a exprima în procente numărul elevilor care au fost evaluați cu nota 8.



Nota	3	4	5	6	7	8	9	10
Numărul de elevi	1	2	3	4	6	5	3	1

Rezolvare:

a) Observând culoarea, deducem că 24% reprezintă procentul elevilor care au fost evaluați cu nota 7.

b) Pentru a exprima în procente numărul elevilor care au fost evaluați cu nota 8, calculăm mai întâi *numărul tuturor elevilor evaluați*: $1 + 2 + 3 + 4 + 6 + 5 + 3 + 1 = 25$. Deducem că 100% reprezintă numărul total al elevilor evaluați, din care 5 au fost evaluați cu nota 8. Aplicăm apoi regula de trei simplă și obținem că 20% din numărul total de elevi au fost evaluați cu nota 8.

Reține!

- Un șir de date asociate unei mărimi variabile poate fi organizat și prezentat prin folosirea **tabelelor** și a **diagramelor**.
- În tabele, organizarea datelor se face pe linii și pe coloane, în funcție de specificul datelor respective. Diagramele oferă posibilitatea prezentării datelor într-o formă geometrică, prin folosirea a două axe de coordonate sau altfel.
- După aspectul ei, o diagramă poate fi: diagramă prin puncte, diagramă de tip linie, diagramă de tip coloană, diagramă circulară etc.
- Datele reprezentate într-o diagramă sunt direct proporționale cu mărimile lor.

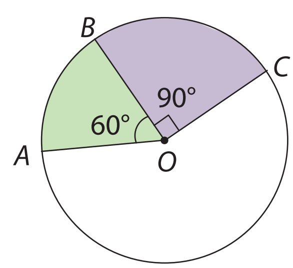
Exersează, fixează și aprofundează cunoștințele

1. În diagrama alăturată se știe că: $\sphericalangle AOB = 60°$ și $\sphericalangle BOC = 90°$.

a) Desenează unghiul *COD*, astfel încât suprafața corespunzătoare acestuia să reprezinte 50% din suprafața circulară.

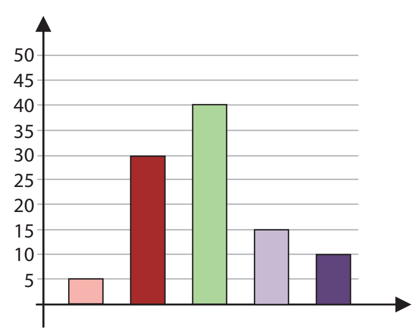
b) Calculează ce procent din suprafața circulară reprezintă suprafața corespunzătoare unghiului *AOB*.

c) Calculează ce procent din suprafața circulară reprezintă suprafața corespunzătoare unghiului *BOC*.



2. La cabinetul de „Orientare școlară și profesională”, elevii au fost întrebați în ce măsură părinții îi influențează în ceea ce privește înscrierea la liceu. Situația este prezentată procentual în diagrama cu bare verticale alăturată:

a) în totalitate; **b)** în mare măsură;
c) într-o oarecare măsură; **d)** în mică măsură;
e) deloc.



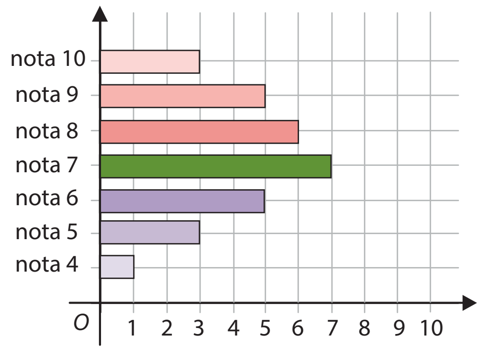
Știind că sondajul s-a desfășurat pe un grup de 600 de elevi, precizează ce reprezintă axa absciselor, ce reprezintă axa ordonatelor și calculează: câți elevi au ales varianta **a)**, câți elevi au ales varianta **b)**, câți elevi au ales varianta **c)**, câți elevi au ales varianta **d)** și câți elevi au ales varianta **e)**.

3. În diagrama cu coloane orizontale alăturată este ilustrată repartiția notelor obținute de elevii unei clase la testul de evaluare inițială. Calculează:

a) procentul elevilor care au fost evaluați cu nota 8;

b) procentul elevilor care au fost evaluați cu nota cel puțin egală cu 8.

c) procentul elevilor care au fost evaluați cu nota cel mult egală cu 7.



4. Realizându-se un studiu pentru a identifica dinamica populațiilor de cetacee din bazinul Mării Negre, s-a ajuns la concluzia că în anul 2018 au eșuat 80 de exemplare, în anul 2019 au eșuat 50 de exemplare, în anul 2020 au eșuat 100 de exemplare și în anul 2021 au eșuat 50 de exemplare.

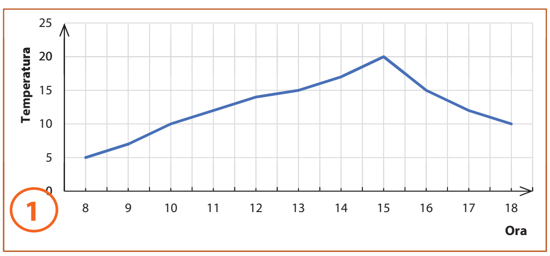
a) Realizează un tabel cu două linii în care să notezi aceste date.

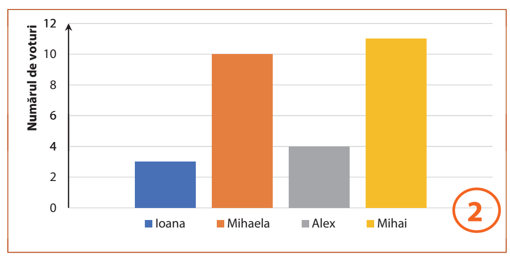
b) Calculează cât la sută din numărul exemplarelor eșuate în 2019 reprezintă numărul exemplarelor eșuate în 2020 și cât la sută din numărul exemplarelor eșuate în 2020 reprezintă numărul exemplarelor eșuate în 2021.

c) Realizează o diagramă de tip coloană care să reprezinte datele problemei.

AUTOEVALUARE

10 min





1. Dacă apreciezi că afirmația este adevărată, încercuiește litera A. În caz contrar, încercuiește litera F. **3 puncte**

Conform diagramei 1, în cursul acelei zile:

a) temperatura maximă a fost atinsă la ora 14; **A F**

b) temperatura a fost mai mare de 15°C între orele 13 și 16; **A F**

c) de la ora 15 până la ora 16 temperatura a crescut cu 5°C. **A F**

2. Încercuiește litera corespunzătoare răspunsului corect. Privește diagrama 2. **3 puncte**

a) La vot au participat:

A. 4 elevi; **B.** 28 de elevi; **C.** 30 de elevi; **D.** 25 de elevi.

b) Cel mai mare număr de voturi a fost obținut de:

A. Ioana; **B.** Mihai; **C.** Mihaela; **D.** Alex.

3. Unește, prin săgeți, fiecare enunț aflat în coloana din stânga cu răspunsul corespunzător aflat în coloana din dreapta. **3 puncte**

Conform diagramei 1, în cursul acelei zile:

a) temperatura a fost mai mare sau egală cu 10°C după ora ...	**1)** 8;
b) temperatura a fost în creștere înainte de ora ...	**2)** 10;
c) temperatura cea mai mică a fost atinsă la ora ...	**3)** 14;
	4) 15.

Din oficiu: 1 punct

II.3.2. REPREZENTAREA DATELOR CU AJUTORUL UNOR SOFTURI MATEMATICE

Microsoft Excel este o componentă a pachetului Microsoft Office, specializată în prelucrarea datelor. Excel pune la dispoziție cel mai popular mod prin care se pot prelucra și reprezenta grafic date, fiind un instrument foarte ușor de utilizat.

Rezolvăm și descoperim cunoștințe noi

1. La o evaluare, elevii claselor a VI-a dintr-o școală au obținut următoarele rezultate:

La matematică:	Grupe de note	**Sub 5**	**5-5,99**	**6-6,99**	**7-7,99**	**8-8,99**	**9-10**
	Numărul elevilor	8	14	27	25	34	20
La limba română:	Grupe de note	**Sub 5**	**5-5,99**	**6-6,99**	**7-7,99**	**8-8,99**	**9-10**
	Procentul elevilor	14%	27%	21%	15%	14%	9%

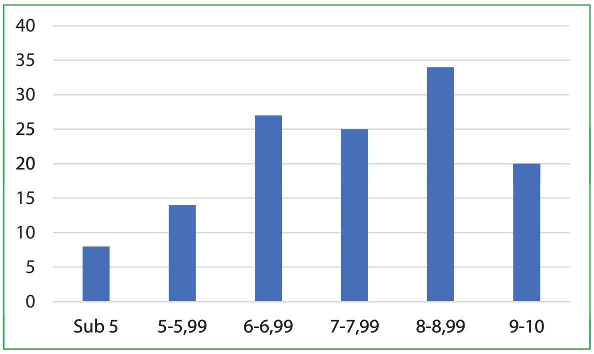
a) Pentru prelucrarea datelor oferite de tabelul cu rezultate, folosind Microsoft Excel, vom realiza o *diagramă de tip coloană*.

Pasul 1: deschideți o foaie Excel.

Pasul 2: introduceți datele cu rezultatele la matematică în celulele foii de lucru.

Pasul 3: selectați tabelul și faceți clic pe *Inserare*, apoi pe pictograma  *Coloană*.

Pasul 4: rezultatul este afișarea imediată a diagramei de tip coloană.



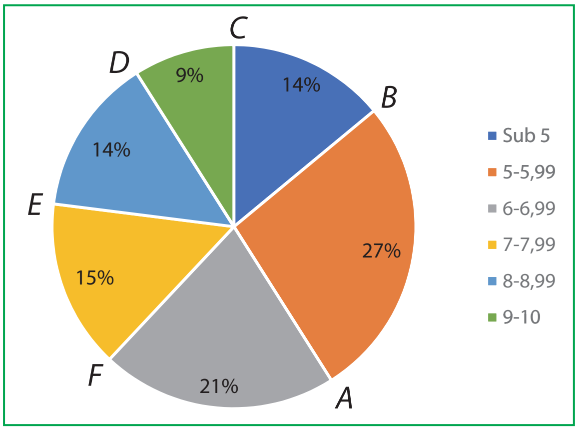
În diagrama rezultată, înălțimile coloanelor sunt direct proporționale cu numerele 8, 14, 27, 25, 34, 20, care reprezintă numărul elevilor, corespunzător grupelor de note:

Sub 5	5-5,99	6-6,99	7-7,99	8-8,99	9-10

b) Urmând aceiași pași, pentru prelucrarea datelor oferite de tabelul cu rezultatele la limba română, realizăm o *diagramă circulară*.

Măsurile arcelor mici evidențiate de diagramă sunt direct proporționale cu valorile: 14%, 27%, 21%, 15%, 14%, 9%. Aceste valori reprezintă procentele elevilor, corespunzătoare grupelor de note. Cu regula de trei simplă calculăm măsurile arcelor mici $\overset{\frown}{AB}$, $\overset{\frown}{CD}$ și $\overset{\frown}{DE}$. Deoarece procentului 100% îi corespund 360°, rezultă:

$\overset{\frown}{AB} = 97{,}2°$, $\overset{\frown}{CD} = 32{,}4°$, $\overset{\frown}{DE} = 50{,}4°$.



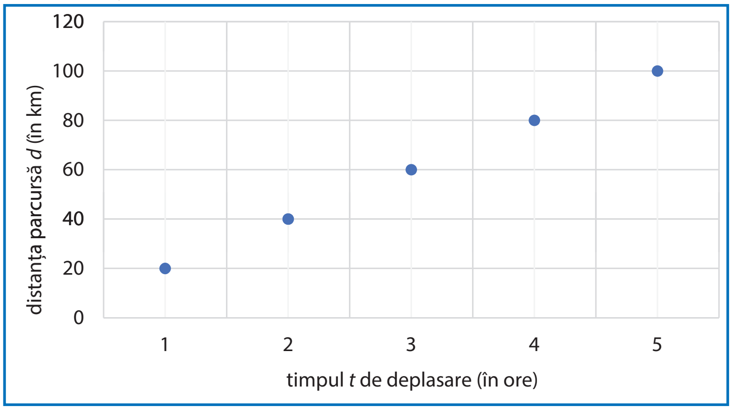
Aplicăm cunoștințele

1. Într-o zi frumoasă de vară, George hotărăște să parcurgă distanța de 100 km până la casa bunicilor cu trotineta electrică. El își propune să parcurgă această distanță cu viteza constantă de 20 km/h. Pentru a studia distanța parcursă pe ore, el realizează următorul tabel:

t (în ore)	1	2	3	4	5
d (în km)	20	40	60	80	100

El a notat cu *d* distanța parcursă și cu *t* timpul în care a parcurs distanța respectivă.
a) Realizează diagrama prin puncte asociată tabelului de mai sus.
b) Arată că numerele 1, 2, 3, 4, 5 sunt direct proporționale cu numerele 20, 40, 60, 80, 100.

Rezolvare:
a) Folosind Microsoft Excel rezultă diagrama prin puncte alăturată.
b) Numerele 1, 2, 3, 4, 5 sunt direct proporționale cu numerele 20, 40, 60, 80, 100, deoarece $\frac{1}{20}=\frac{2}{40}=\frac{3}{60}=\frac{4}{80}=\frac{5}{100}$, iar punctele reprezentării grafice sunt situate pe o dreaptă.



2. George și-a propus să observe în ce relație sunt viteza și timpul dacă distanța este constantă, adică 100 km. În acest scop, George a conceput tabelul alăturat.

t (în ore)	1	2	2,5	4	5
v (în km/h)					

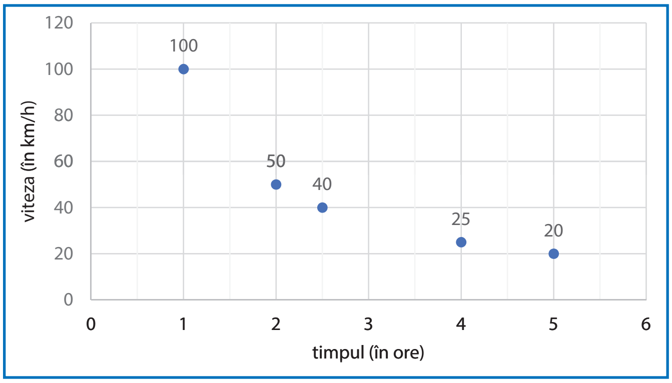
a) Completează tabelul lui George.
b) Realizează diagrama prin puncte asociată tabelului.
c) În cât timp parcurge George, cu trotineta sa, distanța de 100 km, dacă se deplasează cu viteza de 25 km/h?

Rezolvare:

a) Pentru completarea tabelului se utilizează formula de calcul a vitezei: $v=\frac{d}{t}$. Deoarece $d = 100$ km, rezultă că $v=\frac{100}{t}$, de unde obținem: $t = 1 \Rightarrow v = 100$; $t = 2 \Rightarrow v = 50$; $t = 2{,}5 \Rightarrow v = 40$; $t = 4 \Rightarrow v = 25$; $t = 5 \Rightarrow v = 20$. Rezultă următorul tabel:

t (în ore)	1	2	2,5	4	5
v (în km/h)	100	50	40	25	20

b) Folosind Microsoft Excel rezultă diagrama prin puncte alăturată.
c) Din tabel, dar și din diagramă, rezultă că dacă trotineta lui George se deplasează cu viteza de 25 km/h, atunci el va parcurge distanța de 100 km în 4 ore.



Observăm și descoperim cunoștințe noi

Problemele anterioare arată că dacă viteza este constantă, atunci timpul și distanța sunt în relație de proporționalitate directă, iar dacă distanța este constantă, atunci timpul și viteza sunt în relație de proporționalitate inversă.

Reține!

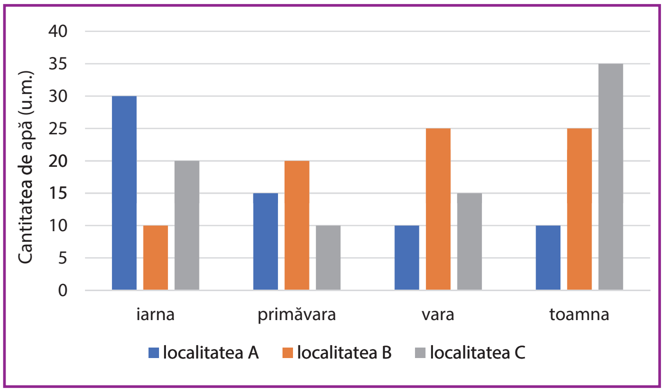
- Dacă variabilele $x_1, x_2, ..., x_n$, supuse unor interpretări, cercetări sau studii, pot fi caracterizate numeric respectiv prin numerele $m_1, m_2, ..., m_n$, atunci aceste informații pot fi organizate într-un tabel de forma:

variabila	x_1	x_2	...	x_n
număr	m_1	m_2	...	m_n

- Informațiile din tabelul de mai sus pot fi reprezentate prin diagrame, folosind softuri/programe tabelare, ca de exemplu *Microsoft Excel*.
- Dacă numerele $m_1, m_2, ..., m_n$ reprezintă părțile procentuale ale unui întreg, atunci este de preferat ca reprezentarea datelor din tabel să se facă printr-o diagramă circulară.
- Dacă variabilele $x_1, x_2, ..., x_n$ sunt numere direct proporționale cu numerele $m_1, m_2, ..., m_n$, inserarea diagramei prin puncte pune în evidență puncte coliniare.

Exersează, fixează și aprofundează cunoștințele

1. Diagrama alăturată reprezintă cantitatea de apă rezultată din ploi în localitățile *A*, *B* și *C*, în cele patru anotimpuri ale anului 2022.



a) În care localitate a plouat cel mai mult și în care anotimp? În care localități și în care anotimpuri a plouat la fel?

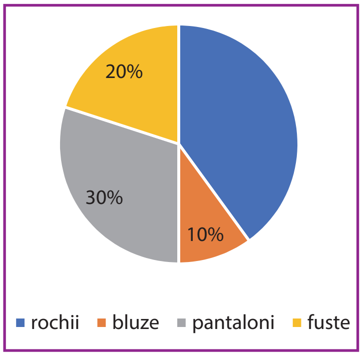
b) În care localitate cantitatea de apă rezultată din ploi este cu 20 de unități de măsură mai mare toamna decât vara?

c) În care anotimpuri diferența dintre cantitățile de apă rezultate din ploi, în localitatea *B*, este egală cu 5 unități de măsură?

d) Realizează un tabel care să ilustreze datele din diagramă.

2. Portofoliu

Diagrama circulară alăturată reprezintă, în procente, producția din anul 2020 a unei fabrici de îmbrăcăminte, an în care fabrica a produs 3500 de articole de îmbrăcăminte.



a) Calculează procentul care reprezintă producția de rochii.

b) Calculează numărul de rochii, de bluze, de pantaloni și de fuste.

c) Pe foaia de matematică, reprezintă o diagramă cu bare care să ilustreze producția fabricii, astfel încât 175 de articole de îmbrăcăminte să fie reprezentate de un dreptunghi cu lungimea de 1 cm.

d) Folosind softul Microsoft Excel, reprezintă și tipărește diagrama rezultată. Anexează diagrama la portofoliul personal.

3. Portofoliu

Se știe că producția de grâu a României a fost de aproximativ:

10000000 tone în anul 2019; 6000000 tone în anul 2020;
9000000 tone în anul 2021; 10000000 tone în anul 2022.

a) Centralizează aceste date într-un tabel.
b) Calculează media producției de grâu pe cei 4 ani.
c) Calculează ce procent din producția fiecărui an reprezintă producția medie.
d) Folosind softul Microsoft Excel, realizează și tipărește o diagramă circulară care să conțină datele problemei și anexează diagrama obținută la portofoliul personal.

4. Portofoliu

Cărțile din biblioteca unei școli sunt centralizate în următorul tabel:

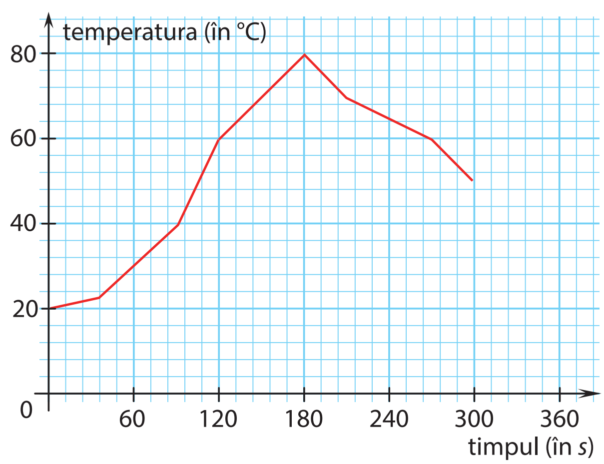
Tipul cărților	Albume	Beletristică	Dicționare	Reviste	Culegeri de probleme
Numărul cărților	1600	2000	800	1200	400

a) Realizează o diagramă de tip coloană, folosind datele din tabel.
b) Calculează numărul total al cărților.
c) Calculează ce procent din numărul total al cărților reprezintă numărul revistelor.
d) Folosind softul Microsoft Excel, realizează și tipărește o diagramă prin puncte care să conțină datele problemei și anexează diagrama obținută la portofoliul personal.

AUTOEVALUARE

10 min

▶ George experimentează încălzirea unei cantități mici de apă într-un vas. Folosindu-se de un cronometru, din minut în minut el măsoară temperatura apei din vas. Vei avea în vedere diagrama de tip linie alăturată, care reprezintă *temperatura* apei în funcție de *durata* încălzirii.



1. Încercuiește litera corespunzătoare răspunsului corect. **3 puncte**

a) La începutul experimentului temperatura apei din vas era de:

A. 25°; **B.** 20°;
C. 18°; **D.** 0°.

b) Apa a atins temperatura maximă după:

A. 80 s; **B.** 2 minute;
C. 240 s; **D.** 3 minute.

2. Unește, prin săgeți, fiecare enunț aflat în coloana din stânga cu răspunsul corespunzător aflat în coloana din dreapta. **4,5 puncte**

a) Apa a atins temperatura de 70° după ...
b) Temperatura apei a fost în descreștere timp de ...
c) Temperatura apei a fost constantă timp de ...

1) 150 de secunde;
2) 180 de secunde;
3) 120 de secunde;
4) 0 secunde.

3. Completează caseta cu răspunsul corect. **1,5 puncte**

Experimentul a încetat după exact ☐ secunde.

Din oficiu: 1 punct

II.3.3. Probabilități

Observăm și descoperim cunoștințe noi


banul


stema

O monedă are două fețe: *banul* și *stema*. Dacă se aruncă moneda, la revenire apare banul sau stema. Este vorba despre o *experiență* cu rezultat întâmplător. Repetăm experiența. Aceasta înseamnă, de fapt, că aruncăm moneda de mai multe ori. Notăm cu n numărul de aruncări, cu n_s numărul de apariții ale stemei și cu f_s rezultatul calculului $\frac{n_s}{n}$. Numărul f_s este numit *frecvența* apariției stemei.

a) Efectuează experiența de: i) 10 ori; ii) 20 de ori; iii) 30 de ori.

b) Copiază tabelul alăturat și înregistrează în el datele obținute.

	n	n_s	f_s
i)	10		
ii)	20		
iii)	30		

Valoarea raportului $f_s = \frac{n_s}{n}$, numită **frecvența** apariției stemei, sugerează o fracție zecimală. Care ar trebui să fie această fracție zecimală?

Pentru a te convinge de corectitudinea aproximării frecvenței apariției stemei, repetă acasă experiența de un număr de ori mult mai mare, de exemplu, de 100 de ori. Vei constata că $f_s \approx 0{,}5$.

Nu întotdeauna putem cunoaște cea mai bună aproximare a frecvenței unui eveniment, deoarece nu putem repeta experiența decât de un număr finit de ori. Frecvența apariției unui eveniment sugerează o noțiune nouă, cea de **probabilitate**.

Pentru a defini probabilitatea, vom considera o experiență aleatorie (de exemplu, aruncarea unei monede) și un eveniment A (de exemplu, apariția stemei). Vom nota cu m numărul cazurilor favorabile evenimentului și cu n numărul cazurilor posibile ale experienței. De exemplu, în cazul aruncării unei monede sunt doar două cazuri posibile ale experienței: banul sau stema. Avem un singur caz favorabil evenimentului A: *stema*. Probabilitatea realizării acestui eveniment este 0,5.

Reține!

- Pentru o experiență aleatorie (cu rezultat întâmplător), **probabilitatea** realizării unui eveniment este raportul dintre numărul cazurilor favorabile realizării evenimentului și numărul cazurilor posibile ale experienței.

Dacă pentru evenimentul A al unei experiențe aleatorii se notează cu m numărul cazurilor favorabile realizării evenimentului și cu n numărul cazurilor posibile ale experienței, atunci probabilitatea realizării evenimentului A este $P_A = \frac{m}{n}$.

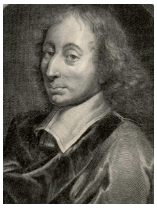
– Deoarece numărul cazurilor favorabile este cel mult egal cu numărul cazurilor posibile ($m \le n$), rezultă că $0 \le P_A \le 1$.

– Dacă $m = n$, atunci $P_A = 1$ și evenimentul A se numește eveniment sigur.

– Dacă $m = 0$, atunci $P_A = 0$ și evenimentul A se numește eveniment imposibil.

Știai că...

Teoria probabilităților este o ramură a matematicii care studiază modul în care se desfășoară fenomenele aleatorii. Începuturile teoriei probabilităților sunt legate de numele matematicienilor Blaise Pascal și Pierre Fermat. În secolul al XVII-lea, ei au ajuns la probleme legate de probabilitate datorită jocurilor de noroc.


Blaise Pascal


Pierre Fermat

Exersează, fixează și aprofundează cunoștințele

1. Un grup de 15 elevi, dintre care 9 sunt fete, și-au dat întâlnire la *Muzeul Național de Istorie Naturală „Grigore Antipa"* din București. Muzeul este considerat cel mai mare muzeu de istorie naturală din țară și una dintre cele mai vechi instituții de cercetare a biodiversității. Calculează probabilitatea ca primul elev care sosește la muzeu să fie băiat.

2. În penarul ei, Cristina are: 9 pixuri roșii, 12 pixuri negre, 6 pixuri albe și 3 pixuri albastre.

a) Cristina deschide penarul și extrage la întâmplare un pix. Calculează probabilitatea ca pixul să fie alb și probabilitatea ca pixul să nu fie roșu.

b) Determină cel mai mic număr de pixuri pe care Cristina trebuie să le extragă din penar pentru a fi sigură că a extras cel puțin un pix negru.

c) Calculează probabilitatea ca extrăgând la întâmplare un pix acesta să nu fie albastru.

3. Într-o urnă sunt bile roșii și verzi. Probabilitatea ca o bilă extrasă aleatoriu din urnă să fie verde este egală cu $\frac{1}{5}$. Dacă în urnă sunt în total 40 de bile, calculează numărul bilelor roșii.

4. Calculează care este probabilitatea ca alegând la întâmplare un număr de o cifră acesta să fie:

a) cel puțin egal cu 3; **b)** cel mult egal cu 5.

5. Care este probabilitatea ca luând la întâmplare un număr de forma $\overline{1x5y}$, acesta să fie divizibil cu 4?

6. Calculează care este probabilitatea ca alegând la întâmplare un număr de două cifre acesta să fie:

a) pătrat perfect; **b)** cub perfect.

7. Pentru o evaluare au fost propuse 25 de subiecte. Un candidat la această evaluare a rezolvat 22 de subiecte dintre cele propuse. Calculează care este probabilitatea ca extrăgând la întâmplare un subiect acesta să nu fi fost rezolvat de candidatul respectiv.

AUTOEVALUARE

10 min

1. Încercuiește litera corespunzătoare răspunsului corect. **4 puncte**

a) Se aruncă un zar. Probabilitatea apariției feței 5 este egală cu:

A. $\frac{1}{5}$; **B.** $\frac{6}{5}$; **C.** $\frac{5}{6}$; **D.** $\frac{1}{6}$.

b) Se aruncă un zar. Probabilitatea să nu apară fața 5 este egală cu:

A. $\frac{1}{5}$; **B.** $\frac{6}{5}$; **C.** $\frac{5}{6}$; **D.** $\frac{1}{6}$.

2. Unește, prin săgeți, fiecare enunț aflat în coloana din stânga cu răspunsul corespunzător aflat în coloana din dreapta. **3 puncte**

Dintr-o urnă cu două bile albe și două bile negre se extrag aleatoriu două bile.

a) Probabilitatea extragerii a două bile albe este egală cu ...	**1)** 1;
b) Probabilitatea ca cele două bile extrase să fie de culori diferite	**2)** 0,5;
este egală cu ...	**3)** 0,25;
c) Probabilitatea ca una din bilele extrase să fie albă sau neagră este ...	**4)** 0,75.

3. Completează caseta cu răspunsul corect. **2 puncte**

Dacă într-o experiență cu rezultat întâmplător probabilitatea realizării unui eveniment A este 25%, atunci probabilitatea să nu se realizeze evenimentul A este egală cu $\boxed{}$.

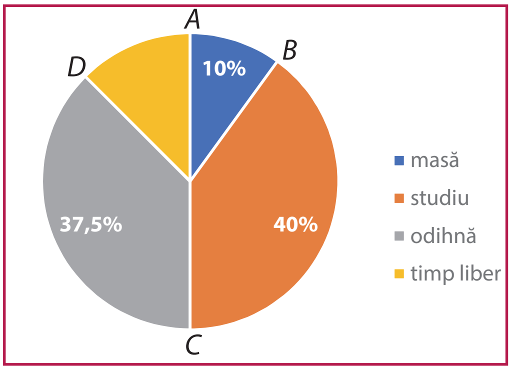
Din oficiu: 1 punct

Exerciții și probleme recapitulative

1. Se consideră experiența aruncării unui zar, o singură dată. Calculează probabilitatea apariției unei fețe având un număr de puncte:
a) par; **b)** prim; **c)** divizor al lui 6; **d)** pătrat perfect.

2. Se consideră mulțimea numerelor naturale de două cifre. Calculează probabilitatea ca, alegând la întâmplare un număr, acesta:
a) să fie divizibil cu 11; **b)** să aibă ultima cifră 5.

3. La un test, un elev a luat nota 4, 2 elevi au luat nota 5, 3 elevi au luat nota 6, 5 elevi au luat nota 7, 6 elevi au luat nota 8, 5 elevi au luat nota 9 și 3 elevi au luat nota 10.
a) Scrie datele problemei într-un tabel.
b) Calculează media clasei la acel test.
c) Calculează frecvența notei 9.
d) Realizează o diagramă prin puncte care să ilustreze datele problemei.



4. În diagrama alăturată este reprezentată distribuția în procente a timpului alocat de Iuliana activităților desfășurate pe parcursul unei zile. Calculează:
a) în procente, timpul liber alocat de Iuliana;
b) în ore, timpul alocat de Iuliana pentru masă, pentru studiu și pentru odihnă;
c) în grade, măsura arcelor: $\overset{\frown}{AB}$, $\overset{\frown}{BC}$, $\overset{\frown}{CD}$, $\overset{\frown}{DA}$.

5. Se consideră experiența alegerii unei cifre de la 0 la 9. Calculează probabilitatea ca aceasta să fie:
a) cifră impară; **b)** cel puțin egală cu 4;
c) cel mult egală cu 7; **d)** multiplu de 3.

6. Într-o urnă sunt 6 bile albe, 9 bile roșii și 12 bile negre. Determină probabilitatea ca extrăgând o bilă aceasta să fie:
a) albă; **b)** roșie; **c)** neagră; **d)** albă sau roșie; **e)** albă și roșie.

7. Camelia a înregistrat temperaturile maxime ale zilelor unei săptămâni și a notat datele într-un tabel.

Ziua	Luni	Marți	Miercuri	Joi	Vineri	Sâmbătă	Duminică
Temperatura	7°	10°	12°	8°	5°	2°	7°

a) Realizează o diagramă cu bare care să reprezinte situația din tabelul Cameliei.
b) Calculează temperatura medie din perioada prezentată de Camelia, rotunjind la sutimi.

8. Se aruncă un zar. Determină probabilitatea apariției:
a) feței cu 5 puncte;
b) unei fețe cu un număr de puncte cel mult egal cu 3;
c) unei fețe cu un număr de puncte cel puțin egal cu 2.

9. La o lucrare de control notele au fost: 7, 5, 8, 9, 10, 4, 6, 7, 8, 9, 8, 7, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 9, 8, 7, 4, 5, 6, 7.
a) Centralizează notele de la test într-un tabel.
b) Calculează media clasei la acest test.
c) Calculează frecvența notei 7 la acest test, sub formă zecimală și sub formă procentuală.
d) Realizează o diagramă de tip coloană, care să ilustreze datele problemei.

10. Determină probabilitatea ca, înlocuind la întâmplare cifra x în numărul $\overline{97x}$, acesta să fie divizibil cu:
a) 2; **b)** 3; **c)** 5; **d)** 9; **e)** 10.

11. a) Cum se numește un eveniment care are șansa de realizare 100%? Dă un exemplu.
b) Cum se numește un eveniment care are șansa de realizare 0%? Dă un exemplu.

EVALUARE

Timp de lucru: 50 de minute.

Subiectul I. Dacă apreciezi că afirmația este adevărată, completează căsuța alăturată cu litera A. În caz contrar, completează cu litera F.

(5p) **1.** Probabilitatea realizării unui eveniment are întotdeauna valori mai mari decât 1. ☐

(5p) **2.** Dacă un eveniment este sigur, atunci probabilitatea realizării acestuia este 1. ☐

(5p) **3.** Dacă probabilitatea realizării unui eveniment este 0, atunci evenimentul este imposibil. ☐

(5p) **4.** Probabilitatea realizării unui eveniment este raportul dintre numărul cazurilor favorabile realizării evenimentului și numărul cazurilor posibile ale experienței. ☐

Subiectul II. Unește, prin săgeți, fiecare cifră corespunzătoare enunțurilor din coloana **A**, cu litera care indică răspunsul corect aflat în coloana **B**.

Diagrama alăturată indică repartiția notelor la testul de evaluare inițială la matematică.

A

(5p) **1.** Numărul elevilor cu note mai mari sau egale cu 7 este egal cu ...

(5p) **2.** Numărul elevilor care au luat note mai mici decât 6 este egal cu ...

(5p) **3.** Numărul elevilor care au luat cel puțin nota 8 este egal cu ...

(5p) **4.** Numărul elevilor care au luat cel mult nota 9 este egal cu ...

B

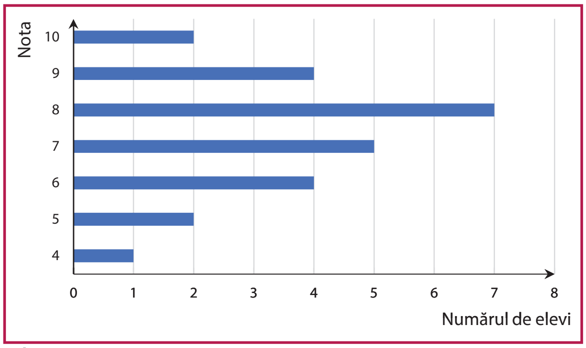
a) 13;

b) 23;

c) 18;

d) 21;

e) 3.



Subiectul III. La cerințele următoare alege litera care indică singura variantă corectă.

(5p) **1.** Se aruncă două zaruri. Probabilitatea ca suma punctelor de pe fețele apărute să fie mai mică decât 10 este egală cu:

A. 0,8(3); **B.** 0,8; **C.** 0,88; **D.** 0,0(6).

(5p) **2.** Într-o urnă sunt 8 bile albe și 4 bile albastre. Probabilitatea ca extrăgând o bilă aceasta să nu fie albastră este egală cu:

A. 0,(3); **B.** 0,4; **C.** 0,8; **D.** 0,(6).

(5p) **3.** Într-o lădiță sunt mere și 5% dintre acestea sunt stricate. Probabilitatea ca luând la întâmplare un măr acesta să nu fie stricat este egală cu:

A. 0,9; **B.** 0,95; **C.** 9; **D.** 95.

(5p) **4.** Într-o urnă sunt bile numerotate de la 1 la 100. Probabilitatea ca extrăgând o bilă la întâmplare aceasta să fie numerotată cu un multiplu al lui 19 este egală cu:

A. 0,50; **B.** 0,05; **C.** 5; **D.** 0,20.

La subiectul IV scrie rezolvarea completă.

Subiectul IV. Se consideră mulțimea: $M = \{20°, 17°, 0°, 90°, 102°, 45°, 60°, 145°, 180°, 75°\}$. Calculează probabilitatea ca, alegând la întâmplare un element din M, acesta să reprezinte măsura unui unghi:

(30p)

a) drept **b)** ascuțit; **c)** nul;

d) obtuz; **e)** impropriu; **f)** propriu.

Se acordă 10 puncte din oficiu. Nota se obține împărțind punctajul final la 10.

Subiectul	I.1	I.2	I.3	I.4	II.1	II.2	II.3	II.4	III.1	III.2	III.3	III.4	IV.a	IV.b	IV.c	IV.d	IV.e	IV.f
Punctajul																		
Nota																		

CAPITOLUL III

MULȚIMEA NUMERELOR ÎNTREGI

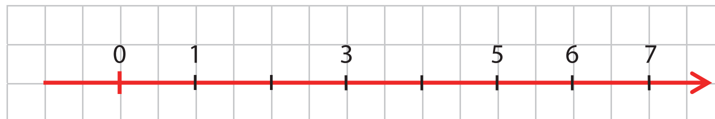
CUPRINS

III.1. NUMERE ÎNTREGI

III.1.1. Mulțimea numerelor întregi. Reprezentarea pe axa numerelor. Opusul și modulul unui număr întreg. Compararea și ordonarea numerelor întregi

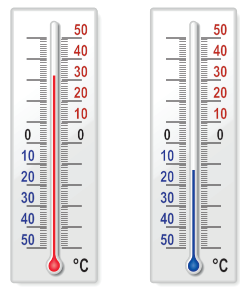
Ne amintim

Ce este *axa numerelor*?
Reprezintă pe axa numerelor numerele naturale 0, 1, 3, 5, 6 și 7.



Observăm și descoperim cunoștințe noi

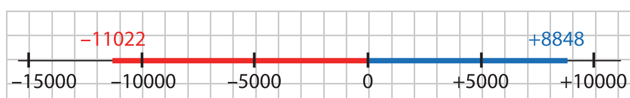
Există situații în realitatea înconjurătoare în care valorile unei mărimi fizice se exprimă cu ajutorul numerelor precedate de semnul „+" sau de semnul „–". În acest fel se pun în evidență două tendințe sau direcții opuse, față de un punct de origine la care se raportează mărimea.



Exemple:

1. Temperatura este o mărime fizică care se măsoară cu termometrul. Unitatea de măsură pentru temperatură este gradul Celsius (°C). În figura alăturată, temperatura indicată de primul termometru este de 32°C deasupra punctului 0, iar temperatura indicată de al doilea termometru este de 13°C sub punctul 0. Spunem că în primul caz temperatura este de +32°C sau 32°C, iar în al doilea caz, temperatura este de –13°C.

2. Cel mai adânc punct de pe suprafața Pământului este Groapa Marianelor, aflată în Oceanul Pacific, sub nivelul mării, la adâncimea de 11022 metri. Cel mai înalt punct de pe suprafața Pământului este Vârful Everest, în Munții Himalaya, acesta fiind la înălțimea de 8848 metri deasupra nivelului mării. Notând cele două direcții față de nivelul mării (adâncimea și înălțimea) cu –, respectiv cu +, atunci pe o axă se pot reprezenta: Groapa Marianelor la –11022 m și Vârful Everest la +8848 m.



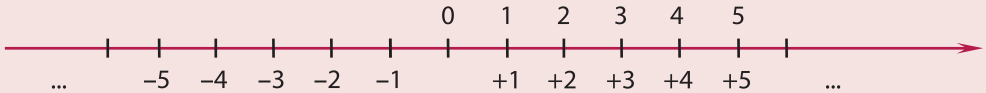
Exemplele de mai sus sugerează ideea că prin număr întreg înțelegem numărul zero sau orice număr natural nenul precedat de *semnul* „+" sau de *semnul* „–". De asemenea, exemplele de mai sus sugerează ideea că numerele întregi se pot reprezenta pe axa numerelor.

Reține!

- Un **număr întreg pozitiv** se reprezintă cu ajutorul unui număr natural nenul precedat de semnul „+" (+1, +2, +17, +301, ...).
- Un **număr întreg negativ** se reprezintă cu ajutorul unui număr natural nenul precedat de semnul „–" (–1, –2, –25, –725, ...).
- **Mulțimea numerelor întregi** este mulțimea ale cărei elemente sunt: numerele întregi negative, 0 și numerele întregi pozitive.

- **Axa numerelor întregi** este o dreaptă pe care se fixează un punct numit *origine*, o *unitate de măsură* și două sensuri: un *sens pozitiv* și un *sens negativ*, notate cu „+", respectiv cu „–".

  ‣ Axa numerelor servește la reprezentarea numerelor întregi:
  – mulțimea numerelor întregi negative: $\mathbb{Z}_- = \{..., -4, -3, -2, -1\}$;
  – mulțimea numerelor întregi pozitive: $\mathbb{Z}_+ = \{+1, +2, +3, +4, +5, ...\}$;
  – mulțimea numerelor întregi: $\mathbb{Z} = \{..., -5, -4, -3, -2, -1, 0, +1, +2, +3, +4, +5, ...\}$



- **Mulțimea numerelor întregi** este reuniunea mulțimilor $\mathbb{Z}_-$, $\{0\}$ și $\mathbb{Z}_+$, adică: $\mathbb{Z} = \mathbb{Z}_- \cup \{0\} \cup \mathbb{Z}_+$.

  ‣ Orice număr natural nenul este număr întreg pozitiv, adică $\mathbb{N} \setminus \{0\} \subset \mathbb{Z}_+$.
  ‣ Orice număr întreg pozitiv este număr natural nenul, adică $\mathbb{Z}_+ \subset \mathbb{N} \setminus \{0\}$.
  ‣ Orice număr întreg pozitiv se identifică cu un număr natural nenul, adică $\mathbb{Z}_+ = \mathbb{N} \setminus \{0\}$.

  Exemple: $+1 = 1$, $+2 = 2$, $+3 = 3$, $+17 = 17$, ...

- **Opusul unui număr întreg**

  ‣ Două numere întregi a căror reprezentare diferă numai prin semn sunt *numere întregi opuse*. Fiecare dintre cele două numere este *opusul* celuilalt. Opusul numărului întreg 0 este 0.

  Exemple: +1 și −1 , −2 și +2, +13 și −13 sunt numere întregi opuse.
  Deoarece −1 și +1 sunt numere întregi opuse, se spune că −1 este opusul lui +1 și +1 este opusul lui −1. Analog -2 este opusul lui +2 și +2 este opusul lui −2.

  ‣ Opusul unui număr întreg este pus în evidență prin scrierea semnului „–" în fața numărului întreg și rezultă prin schimbarea semnului numărului întreg.

  Exemple: $-(+3)$ înseamnă opusul numărului întreg +3, care este −3. Rezultă că $-(+3) = -3$;
  $-(-3)$ înseamnă opusul numărului întreg −3, care este +3. Rezultă că $-(-3) = +3$.

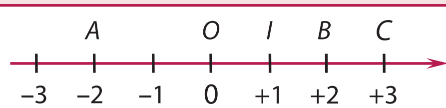
- **Modulul sau valoarea absolută a unui număr întreg**

  ‣ Orice număr întreg nenul este format dintr-un semn (+ sau –) și un număr natural. Numărul natural este *modulul* sau *valoarea absolută* a numărului întreg. Modulul numărului întreg 0 este 0.

  Exemple: Modulul numărului întreg +3 este egal cu numărul natural 3. Notăm: $|+3| = 3$.
  Modulul numărului întreg −7 este egal cu numărul natural 7. Notăm: $|-7| = 7$.

  ‣ Pe axa numerelor, modulul unui număr este egal cu distanța de la origine la reprezentarea acelui număr pe axă și două numere sunt opuse dacă sunt reprezentate prin două puncte simetrice față de originea axei.

  Exemplu: Pe axa numerelor este reprezentată originea *O* și unitatea de măsură aleasă, $OI = 1$. Numerele întregi −2, +2 și +3 sunt reprezentate prin punctele *A*, *B* și, respectiv, *C*.



  Rezultă: $|-2| = OA = 2$, $|+3| = OC = 3$. Deoarece punctele *A* și *B* sunt simetrice față de originea axei ($OA = OB = 2$), rezultă că −2 și +2 sunt numere întregi opuse.

- **Compararea și ordonarea numerelor întregi**

  ‣ Pe axa numerelor, dintre două numere întregi, cel mai mic se află la stânga celui mai mare.

  Exemple: La −5°C este mai frig decât la −2°C sau decât la −1°C. Rezultă că $-5 < -2$ și $-5 < -1$.
  Pe axa numerelor, numărul −5 este în stânga numărului −2. Rezultă că $-5 < -2$.

  Reprezentarea numerelor întregi pe axa numerelor permite justificarea următoarelor afirmații:

  ‣ Orice număr întreg negativ este mai mic decât orice număr întreg pozitiv.
  ‣ Orice număr întreg negativ este mai mic decât numărul întreg 0.
  ‣ Orice număr întreg pozitiv este mai mare decât numărul întreg 0.
  ‣ Dintre două numere întregi negative diferite, este mai mic numărul care are modulul mai mare.

  Exemple:
  $-5 < +2$;$-2 < +7$; $-25 < 1$.
  $-7 < 0$; $-1 < 0$; $-3 < 0$.
  $+3 > 0$; $+1 > 0$; $+249 > 0$.
  $-15 < -2$, deoarece
  $|-15| = 15 > 2 = |-2|$.

Portofoliu

Înțelegerea conținuturilor teoretice anterioare despre numere întregi este foarte importantă. Aceste conținuturi sunt mijloace informaționale ce îți sunt necesare pentru formarea și dezvoltarea competențelor de utilizare a matematicii. Prin urmare, adaugă la portofoliul personal conținuturile teoretice prezentate anterior, însoțite de propriile tale exemple.

Exersează, fixează și aprofundează cunoștințele

1. Răspunde la următoarele întrebări:

a) De ce numărul –7 este număr întreg? **b)** De ce numărul +9 este număr întreg?

c) De ce numărul natural 3 este număr întreg?

2. Se consideră mulțimea $M = \left\{-2,(6);\ +2;\ 4\frac{1}{3};\ 3;\ -2,7;\ +7;\ -2\right\}$. Scrie submulțimea N a mulțimii M, ale cărei elemente sunt numere întregi.

3. Luând ca unitate de măsură un segment cu lungimea de 1,5 cm, reprezintă numerele –3 și +3 pe axa numerelor prin punctele A și, respectiv, B, apoi justifică egalitatea $|-3| = |+3|$ în două moduri.

4. Copiază în caiet și completează tabelul de mai jos:

Numărul	+3	–7	0	–8	+5
Opusul numărului	–3				
Are loc egalitatea	$-(+3) = -3$				
Modulul numărului	3				

5. **a)** Luând ca unitate de măsură un segment cu lungimea de 1 cm, reprezintă numerele întregi –4 și –6 pe axa numerelor.

b) Calculează modulele celor două numere. **c)** Arată că $-6 < -4$, în două moduri.

6. Șase echipe au participat la o competiție sportivă, organizată de un club sportiv. Organizatorul a decis să stabilească ordinea valorică a echipelor după *golaveraj*. Golaverajul este diferența dintre numărul golurilor marcate și numărul golurilor primite și poate fi pozitiv, 0 sau negativ, după cum numărul golurilor marcate este mai mare, egal sau mai mic decât numărul golurilor primite. Situația golurilor marcate și primite este reprezentată în tabelul alăturat.

Echipa	Goluri marcate	Goluri primite	Golaveraj
A	12	9	
B	9	9	
C	10	12	–2
D	8	7	
E	6	9	
F	10	6	

a) Copiază în caiet tabelul și completează-l cu golaverajul fiecărei echipe.

b) Reprezintă, prin puncte pe axa numerelor, golaverajul și echipele.

c) Folosește reprezentarea anterioară și scrie echipele în ordine valorică descrescătoare.

7. Se consideră mulțimea $M = \{+8, -3, +5, 0, 1, -2, -(+4), -(-6)\}$ și următoarele submulțimi ale acesteia:

– submulțimea elementelor x din M pentru care $|x| = x$, notată A;
– submulțimea elementelor x din M pentru care $|x| = -x$, notată B;
– submulțimea elementelor x din M pentru care $|x| + |-x| = 0$, notată C.

a) Scrie fiecare dintre mulțimile A, B și C prin enumerarea elementelor ei.

b) Calculează $A \cup B \cup C$.

AUTOEVALUARE

10 min

1. Dacă apreciezi că afirmația este adevărată, încercuiește litera A. În caz contrar, încercuiește litera F. **3 puncte**

a) Dacă $M = \{0, 1, -2, -(+3), -(-2)\}$, atunci $M \subset \mathbb{Z}$. **A F**

b) Orice număr întreg negativ este mai mic decât orice număr întreg pozitiv. **A F**

c) Pentru că nu are semn, un număr natural nu este un număr întreg. **A F**

2. Unește, prin săgeți, fiecare enunț aflat în coloana din stânga cu răspunsul corespunzător aflat în coloana din dreapta. **4,5 puncte**

a) Dacă $x \in \mathbb{Z}$ și $-1 \le x \le +2$, atunci ...	**1)** $x \in \{0, +1, +2\}$;
b) Dacă $x \in \mathbb{Z}$ și $-1 < x \le +2$, atunci ...	**2)** $x \in \{-1, 0, +1\}$;
c) Dacă $x \in \mathbb{Z}$ și $-1 \le x < +2$, atunci ...	**3)** $x \in \{-1, 0, +1, +2\}$;
	4) $x \in \{-1, 0, -2, +1, +2\}$.

3. Completează caseta cu răspunsul corect. **1,5 puncte**

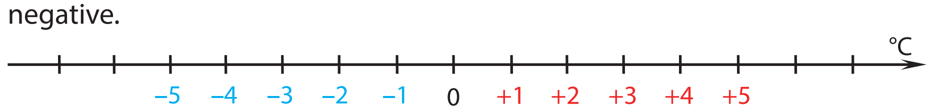
Dacă x este un număr întreg cu $|x| \le 3$ și $x \ge +3$, atunci x este egal cu numărul natural $\boxed{}$.

Din oficiu: 1 punct

III.1.2. ADUNAREA ȘI SCĂDEREA NUMERELOR ÎNTREGI. PROPRIETĂȚI

Rezolvăm împreună

Figura de mai jos reprezintă schematic un termometru pe diviziunile căruia sunt marcate temperaturi exprimate în grade Celsius. La dreapta lui 0 sunt temperaturi pozitive, iar la stânga lui 0 sunt temperaturi negative.



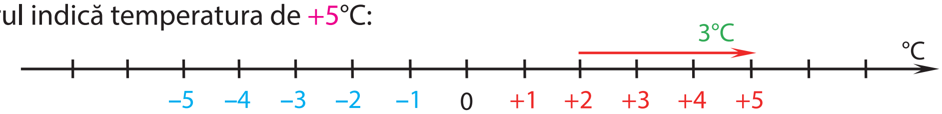
1. La momentul t_1, termometrul indică temperatura +2°C. Calculează câte grade Celsius indică termometrul:

a) dacă temperatura *crește cu* 3°C; **b)** dacă temperatura *scade cu* 7°C.

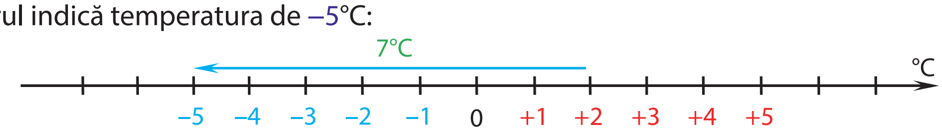
2. La un moment t_2, termometrul indică temperatura −2°C. Calculează câte grade Celsius indică termometrul, dacă temperatura *scade cu* 3°C.

Rezolvare:

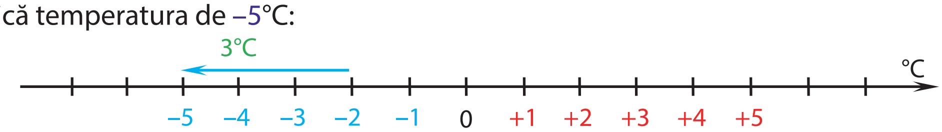
1. a) Pe termometrul schematic, de la +2°C, urmărim creșterea temperaturii cu 3°C și constatăm că termometrul indică temperatura de +5°C:



b) Pe termometrul schematic, de la +2°C, urmărim scăderea temperaturii cu 7°C și constatăm că termometrul indică temperatura de −5°C:



2. Pe termometrul schematic, de la −2°C, urmărim scăderea temperaturii cu 3°C și constatăm că termometrul indică temperatura de −5°C:



Observăm și descoperim cunoștințe noi

În vorbirea curentă, expresiile „crește cu” și „scade cu” sunt folosite destul de frecvent. În matematică, ele sunt asociate cu suma, respectiv cu diferența a două numere. În acest context „rezolvările” bazate pe instrumentul fizic numit termometru se modelează matematic folosind numerele întregi, astfel:

În cazul 1. a), deoarece de la momentul t_1, când termometrul indica temperatura de +2°C, temperatura a crescut cu 3°C rezultă că (+2) + 3 = +5. Cum numărul natural 3 se identifică cu numărul întreg +3, rezultă modelul matematic al rezolvării cerinței: (+2) + (+3) = (+5).

În cazul 1. b), deoarece de la momentul t_1, când termometrul indica +2°C, temperatura a scăzut cu 7°C, rezultă: (+2) – 7 = –5. Cum numărul natural 7 se identifică cu numărul întreg +7, rezultă modelul matematic al rezolvării cerinței: (+2) – (+7) = (–5).

În cazul problemei 2, o judecată asemănătoare conduce la următorul model matematic al rezolvării: (–2) – (+3) = (–5).

Deoarece opusul unui număr întreg $+x$ este $-x$, adică $-(+x) = -x$, putem transforma cele două diferențe de mai sus în sume, după cum urmează: (+2) + (–7) = (–5) și (–2) + (–3) = (–5).

Reține!

- **Adunarea numerelor întregi** este operația prin care se obține suma a două numere întregi.
  - Suma a două numere întregi pozitive este egală cu suma modulelor celor două numere întregi, precedată de semnul „+”.

Exemplu: (+2) + (+3) = +(|(+2)| + |(+3)|) = +(2 + 3) = +5.
  - Suma a două numere întregi negative este egală cu suma modulelor celor două numere întregi, precedată de semnul „–”.

Exemplu: (–5) + (–3) = –(|(–5)| + |(–3)|) = –(5 + 3) = –8.
  - Suma a două numere întregi de semne diferite și module diferite este egală cu diferența modulelor celor două numere întregi, precedată de semnul numărului cu modulul mai mare.

Exemple: (+2) + (–7) = –(|(–7)| – |(+2)|) = –(7 – 2) = –5; (+9) + (–4) = +(|(+9)| – |(–4)|) = +(9 – 4) = +5.
  - Suma a două numere întregi de semne diferite și module egale este egală cu 0.

Exemplu: (+9) + (–9) = |(+9)| – |(–9)| = 9 – 9 = 0.
  - Suma a două numere întregi este egală cu 0 dacă și numai dacă cele două numere întregi sunt opuse.
  - Suma a două numere întregi, dintre care unul este 0, este egală cu celălalt număr întreg.
- **Diferența** dintre un număr întreg a și un număr întreg b este suma numărului întreg a cu opusul numărului întreg b: $a - b = a + (-b)$.
- **Scăderea numerelor întregi** este operația prin care se obține diferența a două numere întregi.
- **Proprietățile adunării numerelor întregi**

  Oricare ar fi numerele întregi a, b și c:
  - $a + b = b + a$ (comutativitatea adunării);
  - $(a + b) + c = a + (b + c)$ (asociativitatea adunării);
  - $0 + a = a + 0 = a$ (numărul întreg 0 este element neutru la adunare);
  - orice număr întreg a are un opus, notat cu $-a$ și $a + (-a) = (-a) + a = 0$.

- **Adunarea unui termen la o egalitate și scăderea unui termen dintr-o egalitate**

  Oricare ar fi numerele întregi a, b și c:
  - dacă $a = b$, atunci $a + c = b + c$;
  - dacă $a = b$, atunci $a - c = b - c$.

  (Dacă la o egalitate adunăm sau scădem un termen, egalitatea se păstrează.)
- **Adunarea unui termen la o inegalitate și scăderea unui termen dintr-o inegalitate**

  Oricare ar fi numerele întregi a, b și c:
  - dacă $a < b$, atunci $a + c < b + c$;
  - dacă $a < b$, atunci $a - c < b - c$.
  - dacă $a > b$, atunci $a + c > b + c$;
  - dacă $a > b$, atunci $a - c > b - c$.

  (Dacă la o inegalitate adunăm sau scădem un termen, inegalitatea se păstrează.)

Rezolvăm împreună

Calculează $S = (-1) - (-3) + (-7)$, unde am evidențiat semnele operațiilor de adunare și scădere, pentru a le deosebi de semnele numerelor întregi.

Rezolvare: Transformăm operația de scădere în operație de adunare, apoi efectuăm adunările în ordinea în care sunt scrise.

$$S = (-1) - (-3) + (-7) = \underbrace{\underbrace{\underbrace{(-1) + (+3)}_{+(|(+3)|-|(-1)|)}}_{+(3-1)}}_{+2} + (-7) = \underbrace{\underbrace{\underbrace{(+2) + (-7)}_{-(|(-7)|-|(+2)|)}}_{-(7-2)}}_{-5} = -5$$

Observăm și descoperim cunoștințe noi

1. Egalitatea $S = (-1) + (+3) + (-7)$ rezultată din egalitatea dată, $S = (-1) - (-3) + (-7)$, este o sumă de numere întregi. Spunem că S este o sumă algebrică. Termenii sumei sunt numerele întregi -1, $+3$ și -7.

2. Ne amintim că reprezentarea numerelor naturale și a numerelor întregi pe axa numerelor sugerează că putem identifica orice număr întreg pozitiv cu un număr natural nenul și invers. Prin urmare, în cazul numerelor întregi pozitive se poate renunța la semnul „+". Altfel spus, numărul natural n este același cu numărul întreg $+n$. Justificăm următoarele egalități (unde n este un număr natural):

1. $+n = n$	numărul natural n este același cu numărul întreg $+n$;
2. $-(+n) = -n$	opusul numărului întreg $+n$ este numărul întreg $-n$;
3. $-(-n) = +n$	opusul numărului întreg $-n$ este numărul întreg $+n$;
4. $0 + (+n) = +n$	0 este element neutru pentru adunarea numerelor întregi pozitive;
5. $0 + (-n) = -n$	0 este element neutru pentru adunarea numerelor întregi negative;
6. $+(+n) = +n$	convenție de rescriere pentru 4;
7. $+(-n) = -n$	convenție de rescriere pentru 5.

Egalitățile 2, 3, respectiv 6 și 7 conduc la următoarele două reguli: „minus" în fața unei paranteze schimbă semnul termenilor din paranteză și „plus" în fața unei paranteze nu schimbă semnul termenilor din paranteză.

De exemplu, pentru suma algebrică $S = (-1) - (-3) + (-7)$, ținând cont că primul termen al sumei este -1, rezultă $S = -1 + 3 - 7$. Să remarcăm că termenii acestei sume -1, $+3$ și -7 pot fi scriși în orice ordine dorim. Într-adevăr, din rezolvarea precedentă, $S = (-1) + (+3) + (-7)$, iar proprietatea de comutativitate ne permite să schimbăm ordinea termenilor. De exemplu, putem scrie mai întâi termenii pozitivi și apoi pe cei negativi: $S = 3 - 1 - 7$. Deoarece „minus" în fața unei paranteze schimbă semnul termenilor din paranteză, rezultă egalitatea $-1 - 7 = -(1 + 7)$ și atunci $S = 3 - (1 + 7) = 3 - 8 = -5$.

Reține!

- **Suma algebrică** este o expresie care conține numere întregi și semnele „+" și/sau „–" între acestea.
- Dacă avem de calculat o sumă algebrică, este indicată următoarea ordine a operațiilor: transformarea scăderilor în adunări, gruparea numerelor cu același semn, stabilirea rezultatului final.
- **Reguli ale scrierii sumelor algebrice:**
  - semnul „–" în fața unei paranteze schimbă semnele termenilor din paranteză;
  - semnul „+" în fața unei paranteze nu schimbă semnele termenilor din paranteză.

Portofoliu

Proprietățile adunării numerelor întregi sunt foarte importante atunci când efectuăm operații cu numere întregi. Adaugă la portofoliul personal aceste proprietăți, însoțite de verificarea lor prin exemple proprii.

Exersează, fixează și aprofundează cunoștințele

1. **a)** Calculează suma a două numere întregi:

$(+2) + (+7)$; $(-3) + (-4)$; $(+7) + (-3)$; $(-2) + (+9)$; $(-3) + (+3)$;
$(+5) + (-5)$; $0 + (+2)$; $(+3) + 0$; $0 + (-2)$; $(-4) + 0$.

b) Calculează diferența a două numere întregi:

$(+2) - (+7)$; $(-3) - (-4)$; $(+7) - (-3)$; $(-2) - (+9)$; $(-3) - (+3)$;
$(+5) - (-5)$; $0 - (+2)$; $(+3) - 0$; $0 - (-2)$; $(-4) - 0$.

2. **a)** Arată că numerele +7 și +15 pot fi scrise ca sume de două numere întregi, ambele pozitive.
b) Arată că numerele −17 și −21 pot fi scrise ca sume de numere întregi, ambele negative.
c) Arată că numerele −10 și +5 pot fi scrise ca sume de numere întregi, unul negativ și altul pozitiv.
d) Arată că scăderea numerelor întregi nu este comutativă.

3. **Activitate în perechi.** Efectuând operațiile în ordinea în care sunt scrise, calculați:
a) $(-3) + (+2) - (-7) + (-15) - (+3) - (+9)$; **b)** $(-4) + (-2) - (+7) - (+3) - (+2) - (-5)$.

4. Se consideră suma algebrică: $S = (-3) + (-9) - (-3) - (+8) - (-4)$.
a) Scrie S sub forma cea mai simplă. **b)** Calculează S, $-S$, $|S|$ și $|-S|$.

5. Se consideră numărul întreg: $a = -3 + 2 - 7 + 8 + 5 - 13$. Scrie opusul numărului întreg a și arată că: $-(-3 + 2 - 7 + 8 + 5 - 13) = 3 - 2 + 7 - 8 - 5 + 13$.

6. Folosind proprietățile adunării, calculează cât mai rapid:
a) $(+1) + (-2) + (+3) + (-4) + (+5) + (-6) + (+7) + (-8) + (+9) + (-10)$;
b) $1 + 2 + (-3) + (-4) + 5 + (-6) + 7 + (-8) + 9 + (-10) + (+11) + (-12)$.

7. Determină opusul numărului x, pentru:
a) $x = 4 + (-10) - 24 - (-15)$; **b)** $x = |-7| - |+3| + |-5 + 2| + (-11)$.

8. Calculează sumele:
a) $S_1 = -1 + 2 - 3 + 4 - 5 + ... - 99 + 100$; **b)** $S_2 = -2 + 4 - 6 + 8 - 10 + ... - 198 + 200$.

9. Dacă numerele întregi x și y verifică egalitatea $|-x + 4| + |y + 7| = 0$, calculează suma $x + y$, diferența $x - y$ și diferența $y - x$.

AUTOEVALUARE

1. Dacă apreciezi că afirmația este adevărată, încercuiește litera A. În caz contrar, încercuiește litera F. **3 puncte**

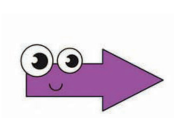
a) Suma dintre un număr întreg negativ și opusul său este un număr întreg negativ. **A F**
b) Suma a două numere întregi negative este un număr negativ. **A F**
c) Numărul întreg −5 poate fi scris ca o diferență de două numere pozitive. **A F**

2. Încercuiește litera corespunzătoare răspunsului corect. **3 puncte**

Dacă $a = +5$, $b = +3$, $c = -2$ și $d = -1$, atunci:
a) numărul întreg $a + b + c + d$ este egal cu:
A. 11; **B.** 5; **C.** 9; **D.** 10.
b) numărul întreg $a - b - c - d$ este egal cu:
A. 5; **B.** 6; **C.** 3; **D.** 7.

3. Unește, prin săgeți, fiecare enunț aflat în coloana din stânga cu răspunsul corespunzător aflat în coloana din dreapta. **3 puncte**

a) $(+3) - (-4) = ...$
b) $-(-4) - (+5) = ...$
c) $(+3) + (-7) = ...$



1) −1;
2) −4;
3) +7;
4) +4.

Din oficiu: 1 punct

III.1.3. Înmulțirea numerelor întregi. Proprietăți

Rezolvăm împreună

Calculează sumele de numere întregi S_1, S_2, S_3 și S_4 dacă:

- S_1 are 4 termeni și fiecare termen al sumei este numărul întreg +3;
- S_2 are 3 termeni și fiecare termen al sumei este numărul întreg +4;
- S_3 are 4 termeni și fiecare termen al sumei este numărul întreg −3;
- S_4 are 3 termeni și fiecare termen al sumei este numărul întreg −4.

$(-3) \cdot (-4) =$

***Rezolvare*:**

$S_1 = \underbrace{(+3) + (+3) + (+3) + (+3)}_{\text{de 4 ori } (+3)} = +12$	$S_2 = \underbrace{(+4) + (+4) + (+4)}_{\text{de 3 ori } (+4)} = +12$
$S_3 = \underbrace{(-3) + (-3) + (-3) + (-3)}_{\text{de 4 ori } (-3)} = -12$	$S_4 = \underbrace{(-4) + (-4) + (-4)}_{\text{de 3 ori } (-4)} = -12$

Observăm și descoperim cunoștințe noi

În vorbirea curentă, prin de 4 ori (+3) se înțelege $4 \cdot (+3)$, iar prin de 3 ori (+4) se înțelege $3 \cdot (+4)$. Prin urmare, putem scrie $S_1 = 4 \cdot (+3) = +12$ și $S_2 = 3 \cdot (+4) = +12$. Rezultă: $4 \cdot (+3) = 3 \cdot (+4)$. Identificând numerele naturale 4 și 3 cu numerele întregi +4 și +3, rezultă egalitățile:

$$(+4) \cdot (+3) = (+3) \cdot (+4) = +12.$$

Analog, rezultă egalitățile: $(+4) \cdot (-3) = (+3) \cdot (-4) = -12.$

Cum calculăm produsul $(-4) \cdot (-3)$? Dar produsul $(-3) \cdot (-4)$?

Din cele patru egalități de mai sus rezultă că modulul produsului este egal cu produsul modulelor celor doi factori, iar la schimbarea semnului unuia dintre factorii produsului semnul produsului se schimbă. Prin urmare, schimbând semnul factorului +3 din produsul $(+4) \cdot (+3) = +12$, semnul produsului se schimbă, deci rezultă egalitatea $(+4) \cdot (-3) = -12$. În această egalitate, dacă se schimbă semnul factorului +4, se schimbă și semnul produsului, deci rezultă $(-4) \cdot (-3) = +12$. Analog, calculul produsului $(-3) \cdot (-4)$ conduce la egalitatea $(-3) \cdot (-4) = +12$.

$(+4) \cdot (+3) = +12$ și $(+3) \cdot (+4) = +12$
$(+4) \cdot (-3) = -12$ și $(+3) \cdot (-4) = -12$
$(-4) \cdot (-3) = +12$ și $(-3) \cdot (-4) = +12$

Rezolvarea precedentă a condus la egalitățile alăturate, unde observăm că dacă două numere întregi au același semn, produsul lor este pozitiv, iar dacă au semne contrare, produsul lor este negativ. Acest rezultat este cunoscut sub numele de regula semnelor. În toate cazurile, modulul produsului este egal cu produsul modulelor celor două numere întregi.

Reține!

- **Produsul a două numere întregi** este un număr întreg egal cu:
  - produsul modulelor celor două numere întregi, precedat de semnul „+", dacă cele două numere întregi sunt nenule și au același semn;
  - produsul modulelor celor două numere întregi, precedat de semnul „–", dacă cele două numere întregi sunt nenule și au semne diferite.
  - Produsul oricărui număr întreg cu 0 și produsul lui 0 cu orice număr întreg este egal cu 0.

- **Înmulțirea numerelor întregi** este operația prin care se obține produsul a două numere întregi.
- **Regula semnelor:**
  $(+)\cdot(+)=(+)$ $(-)\cdot(-)=(+)$ $(+)\cdot(-)=(-)$ $(-)\cdot(+)=(-)$
- Modulul unui produs de numere întregi este egal cu produsul modulelor.
- **Proprietățile înmulțirii numerelor întregi**
  Dacă a, b și c sunt numere întregi, atunci:
  - $(a\cdot b)\cdot c=a\cdot(b\cdot c)$ (asociativitatea);
  - $1\cdot a=a\cdot 1$ (numărul întreg 1 este element neutru la înmulțire);
  - $a\cdot b=b\cdot a$ (comutativitatea);
  - $a\cdot(b+c)=a\cdot b+a\cdot c$ și $a\cdot(b-c)=a\cdot b-a\cdot c$ (distributivitatea față de adunare și scădere).
- Un produs este egal cu 0 dacă și numai dacă un factor al produsului este egal cu 0.
- **Înmulțirea unei egalități cu un factor**
  Oricare ar fi a, b și c numere întregi, *dacă* $a=b$, *atunci* $a\cdot c=b\cdot c$.
  (Prin înmulțirea unei egalități cu un factor, egalitatea se păstrează.)
- **Înmulțirea unei inegalități cu un factor**
  Oricare ar fi a, b și c numere întregi:
  - dacă $a<b$ și $c>0$ atunci $a\cdot c<b\cdot c$;
  - dacă $a>b$ și $c>0$ atunci $a\cdot c>b\cdot c$;
  (Prin înmulțirea unei inegalități cu un număr întreg pozitiv, sensul inegalității se păstrează.)
  - dacă $a<b$ și $c<0$ atunci $a\cdot c>b\cdot c$;
  - dacă $a>b$ și $c<0$ atunci $a\cdot c<b\cdot c$.
  (Prin înmulțirea unei inegalități cu un număr negativ, sensul inegalității se schimbă.)

Exersează, fixează și aprofundează cunoștințele

1. Calculează:
a) $(-2)\cdot(-5)$; **b)** $(-11)\cdot(+4)$; **c)** $(-4)\cdot(-102)$; **d)** $(-7)\cdot(+3)$;
e) $(-73)\cdot 0$; **f)** $(-33)\cdot(+10)$; **g)** $18\cdot(-1)$; **h)** $(-41)\cdot(+2)$;
i) $(+18)\cdot(-5)$; **j)** $9\cdot(+3)$; **k)** $(-10)\cdot(+213)$; **l)** $0\cdot(-19)$.

2. Copiază tabelul în caiet și completează-l cu rezultatele calculelor.

„·”	−2	+5	0	−4	+3	−10	+11	−6	+10	−5
−3	+6									
0										
+4										

3. Folosește proprietățile de asociativitate și comutativitate și calculează cât mai rapid:
a) $(-4)\cdot(-213)\cdot(+25)$; **b)** $+2\cdot(-117)\cdot(-50)$; **c)** $(-2)\cdot 37\cdot(+4)\cdot(-125)$;
d) $+50\cdot(-17)\cdot(-200)\cdot(-3)$; **e)** $(-5)\cdot(-217)\cdot(-4)\cdot(-10)$; **f)** $(-15)\cdot 313\cdot(-8)\cdot(-20)$.

4. Copiază, apoi completează tabelul de mai jos și scrie proprietățile numerelor întregi, exemplificate cu ajutorul părții colorate a tabelului, unde scrierea „x ? y” înseamnă „compară numerele x și y”.

a	b	c	$a\cdot c$	$b\cdot c$	c ? 0	a ? b	$a\cdot c$? $b\cdot c$
−2	+3	+2					
−5	−2	+3					
+2	+3	−1					

5. Dacă $x, y \in \mathbb{Z}$ și $x<y$, compară numerele:
a) $2\cdot x$ și $2\cdot y$; **b)** $2+x$ și $2+y$; **c)** $x\cdot(-2)$ și $y\cdot(-2)$; **d)** $x+(-2)$ și $y+(-2)$;
e) $+3\cdot x$ și $+3\cdot y$; **f)** $x-(+5)$ și $y-(+5)$; **g)** $-8\cdot x$ și $-8\cdot y$; **h)** $x-4$ și $y-4$.

6. Se consideră două numere întregi a și b.
a) Știind că suma celor două numere întregi este egală cu -3, calculează $(-2)\cdot a+(-2)\cdot b$.
b) Știind că diferența celor două numere întregi este egală cu 4, calculează $a\cdot(-5)-b\cdot(-5)$.

AUTOEVALUARE

1. Încercuiește litera corespunzătoare răspunsului corect. **4 puncte**

a) Dacă $a = -10$ și $b = -1$, produsul $a \cdot b$ este egal cu:

A. 11; B. −10; C. 10; D. −11.

b) Produsul numerelor întregi negative mai mari decât −4 este egal cu:

A. 6; B. −6; C. 24; D. −24.

2. Unește, prin săgeți, fiecare enunț aflat în coloana din stânga cu răspunsul corespunzător aflat în coloana din dreapta. **4 puncte**

a) $(+8) \cdot (-2) = ...$	1) +16;
b) $(-8) \cdot (-2) = ...$	2) −4;
c) $(+2) \cdot (+2) = ...$	3) −16;
d) $(+2) \cdot (-2) = ...$	4) +4;
	5) 0.

3. Completează caseta cu răspunsul corect. **1 punct**

Dacă a și b sunt numere întregi, $a \neq 1$, $b \neq 1$ și $a \cdot b = 1$, atunci suma numerelor întregi a și b este egală cu $\boxed{\quad}$.

Din oficiu: 1 punct

III.1.4. ÎMPĂRȚIREA NUMERELOR ÎNTREGI CÂND DEÎMPĂRȚITUL ESTE MULTIPLU AL ÎMPĂRȚITORULUI

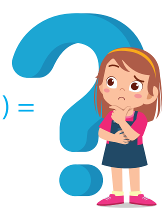
Rezolvăm împreună

1. Cum se calculează $(+12) : (+3)$? Dar $(-12) : (-3)$?

Identificând numerele întregi +12 și +3 cu numerele naturale 12 și 3 rezultă $(+12) : (+3) = 12 : 3 = 4$. Identificând numărul natural 4 cu numărul întreg +4, rezultă că $(+12) : (+3) = +4$.

Pentru a calcula $(-12) : (-3)$, în produsul $(-3) \cdot (+4) = -12$ punem în evidență factorul −3. Rezultă: $-3 = (-12) : (+4) \Leftrightarrow (-12) : (-3) = +4$.

$(-12) : (-3) =$



2. Putem calcula $(+15) : (+7)$? Nu, pentru că, procedând ca în exemplul de mai sus, ajungem la împărțirea $15 : 7$, al cărei rezultat nu este un număr natural, deoarece 15 nu este divizibil cu 7.

Egalitățile deduse mai sus și observația că nu putem calcula $(+15) : (+7)$ permit următoarea concluzie: Oricare ar fi numerele întregi a și b, $b \neq 0$, dacă $|a| : |b| = |c|$ și $a = b \cdot c$, atunci $a : b = c$.

Reține!

- **Câtul** a două numere întregi a și b, $b \neq 0$, se notează cu $a : b$.
  Numerele a și b se numesc factorii câtului: a se numește deîmpărțit, iar b se numește împărțitor.
- Operația prin care se obține câtul a două numere întregi se numește **împărțire**.
- Câtul a două numere întregi este un număr întreg numai dacă modulul deîmpărțitului este divizibil cu modulul împărțitorului.
- **Regula semnelor:**
  $(+) : (+) = (+)$ $(-) : (-) = (+)$ $(+) : (-) = (-)$ $(-) : (+) = (-)$
  Dacă deîmpărțitul și împărțitorul au același semn, câtul este pozitiv. Dacă deîmpărțitul și împărțitorul au semne diferite, câtul este negativ.
- Modulul unui cât este egal cu câtul modulelor.

Rezolvăm împreună

Numerele întregi a, b și c sunt astfel încât $b : c$ și $a : c$ sunt și ele numere întregi.

a) Copiază și completează în caiet tabelul de mai jos.

b	c	a	$b : a$	$c : a$	$b : a + c : a$	$(b + c) : a$
+12	+6	−3				
+8	−24	+4				
−32	−36	+2				
+24	+36	−12				
−6	−12	−3				

Dicționar

plauzibil = care poate fi admis, crezut, care pare a corespunde realității.

b) Folosește tabelul și formulează un răspuns plauzibil la întrebările:

- Este $(b + c) : a$ număr întreg?
- Are loc egalitatea: $(b + c) : a = b : a + c : a$?

Rezolvare:

a) Pentru $b = +12$, $c = +6$ și $a = -3$ efectuăm calculele:

$b : a = (+12) : (-3) = -4$ și $c : a = (+6) : (-3) = -2$; $\quad b : a + c : a = (-4) + (-2) = -(4 + 2) = -6$;

$(b + c) : a = [(+12) + (+6)] : (-3) = (12 + 6) : (-3) = 18 : (-3) = -6$.

b) Completând tabelul, rezultă egalitatea $(b + c) : a = b : a + c : a$. Prin urmare, egalitatea este plauzibilă.

Observație: Se poate arăta că oricare ar fi a, b, c numere întregi, dacă $b : a$ și $c : a$ sunt numere întregi, atunci $(b + c) : a = b : a + c : a$.

Exersează, fixează și aprofundează cunoștințele

1. Calculează $a : b$ în mulțimea numerelor întregi:

a) $a = 27, b = 9$; **b)** $a = +27, b = +9$; **c)** $a = 21, b = 3$; **d)** $a = -21, b = -3$;
e) $a = 32, b = 8$; **f)** $a = -32, b = +8$; **g)** $a = 26, b = 13$; **h)** $a = +26, b = -8$.

2. Calculează:

a) $(+10) : (-1)$; **b)** $(-10) : (+1)$; **c)** $0 : (+1)$; **d)** $0 : (-1)$.

3. Determină numărul întreg x, știind că:

a) $x : 3 = 7$; **b)** $(-18) : x = -2$; **c)** $x : 8 = 7$; **d)** $(+32) : x = -4$.

4. Copiază în caiet, efectuează calculele și completează tabelul:

:	125	−125	−25		10		+2	−1000		+200
1000	8			−40		1			−20	

5. Dacă a și b sunt numere întregi astfel încât $a : b$ și $b : a$ sunt numere întregi, arată că $|a| = |b|$.

6. Arată că dacă a, b, c, $(a + b) : c$, $a : c$ și $b : c$ sunt numere întregi, atunci are loc egalitatea:

$$(a + b) : c = a : c + b : c.$$

(Spunem că *împărțirea este distributivă la stânga față de adunare*.)

7. Activitate în perechi. Calculați în două moduri:

a) $(-24 - 39) : 3$; **b)** $(63 - 35) : (-7)$; **c)** $(-450 + 30) : 15$;
d) $(4016 - 196) : (-4)$; **e)** $(-234 + 45) : 3$; **f)** $(-1200 - 100) : (-10)$.

8. Calculează S și $S : (-2)$ dacă:

a) S este suma tuturor numerelor întregi a și b care verifică egalitatea $a = 3 : (b + 5)$.

b) S este suma tuturor numerelor întregi a și b care verifică egalitatea $a = 3 : (b - 5)$.

Portofoliu

Folosind internetul sau alte surse, realizează un eseu despre istoria numerelor negative.

AUTOEVALUARE

10 min

1. Dacă apreciezi că afirmația este adevărată, încercuiește litera A. În caz contrar, încercuiește litera F. **4 puncte**

a) Dacă $a = -3$, $b = +4$ și $c = -12$, atunci $c : b = a$. A F

b) Dacă $a = +3$, $b = -6$ și $c = -18$, atunci $a - b = (c : b) + (c : a)$. A F

c) Dacă $a \in \mathbb{Z}$, $b \in \mathbb{Z}$, $a : b \in \mathbb{Z}$, atunci $(-a) : (-b) > 0$. A F

d) Dacă a și b sunt numere întregi și $a \cdot b = c$, atunci $a + b = (c : b) + (c : a)$. A F

2. Încercuiește litera corespunzătoare răspunsului corect. **3 puncte**

a) Dacă $a = -96$, $b = +4$, $c = -6$ și $d = a : b : c$, efectuând calculele în ordinea în care sunt scrise, numărul întreg d este egal cu:

A. $+6$; B. -6; C. $+4$; D. -4.

b) Dacă $a = +288$, $b = -8$, $c = +6$, $d = a : b$, $e = d : c$, rezultă că suma $c + e + b$ este egală cu:

A. d; B. c; C. b; D. e.

3. Completează caseta cu răspunsul corect. **2 puncte**

Numerele întregi $x = -8$ și $y = +4$ reprezintă un exemplu de două numere care verifică egalitatea $(x - y) : (-2) = +6$. Dacă a și b sunt alte două numere întregi care verifică aceeași egalitate, atunci diferența dintre numerele întregi $b : (-2)$ și $a : (-2)$ este egală cu numărul întreg $\boxed{}$.

Din oficiu: 1 punct

Știai că...

Referințe privind numerele negative există încă din antichitate, dar acceptarea acestora de către matematicieni a fost dificilă și a durat foarte mult. În Europa, prima carte în care au fost amintite numerele negative a fost *Arithmetica integra* (1544) a lui Michael Stifel, însă numerele negative au fost definite abia în veacul al XIX-lea, când s-au pus bazele logice ale matematicii.

Michael Stifel

III.1.5. Puterea cu exponent număr natural a unui număr întreg nenul. Reguli de calcul cu puteri

Ne amintim

Puterea cu exponent natural a unui număr natural. Reguli de calcul cu puteri

$2^6 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 64$; $2^3 \cdot 2^7 = 2^{3+7} = 2^{10}$; $7^{10} : 7^2 = 7^{10-2} = 7^8$;

$(2^3)^7 = 2^{3 \cdot 7} = 2^{21}$; $(3 \cdot 5)^2 = 3^2 \cdot 5^2$; $(6 : 2)^3 = 6^3 : 2^3$.

Puterea cu exponent număr natural a unui număr întreg nenul se definește în același mod ca puterea cu exponent număr natural a unui număr natural. Prin analogie: $(+3)^2 = (+3) \cdot (+3)$; $(-5)^3 = (-5) \cdot (-5) \cdot (-5)$.

Regulile de calcul ale puterilor de numere naturale cu exponent natural se extind și la puterile numerelor întregi nenule cu exponenți naturali.

Rezolvăm împreună

1. a) Calculează $(+2)^3$.

b) Cum se citește scrierea $(+2)^3$? Care este baza? Dar exponentul?

c) Efectuează calculele de mai jos, în două moduri:
- calculează fiecare putere și efectuează operația indicată;
- aplică regulile de calcul cu puteri.

$(+2)^3 \cdot (+2)^4$; $\quad (-3)^2 \cdot (-3)^3$; $\quad (-1)^6 \cdot (-1)^5$;

$(-4)^3 : (-4)^2$; $\quad (+5)^4 : (+5)^2$; $\quad (-1)^7 : (-1)^3$.

Rezolvare:

a) $(+2)^3 = 2^3 = 8 = +8$.

b) Scrierea $(+2)^3$ se citește „+2 la puterea a treia". *Baza* este +2, iar *exponentul* este 3.

c) $(+2)^3 \cdot (+2)^4 = 2^3 \cdot 2^4 = 8 \cdot 16 = 128$; $\quad (+2)^3 \cdot (+2)^4 = 2^{3+4} = 2^7 = 128$;

2. Verifică egalitățile:

a) $[(+3) \cdot (-2)]^2 = (+3)^2 \cdot (-2)^2$; $\quad$ **b)** $[(-2)^3]^2 = (-2)^6$;

c) $[(-6) : (-3)]^2 = (-6)^2 : (-3)^2$.

$$(a \cdot b)^m = a^m \cdot b^m$$
$$(a^m)^n = a^{m \cdot n}$$
$$(a : b)^m = a^m : b^m$$

Rezolvare:

a) $[(+3) \cdot (-2)]^2 = (-6)^2 = 36$ și $(+3)^2 \cdot (-2)^2 = 9 \cdot 4 = 36$;

b) $[(-2)^3]^2 = (-8)^2 = 64$ și $(-2)^6 = 64$;

c) $[(-6) : (-3)]^2 = 2^2 = 4$ și $(-6)^2 : (-3)^2 = 36 : 9 = 4$.

Reține!

- Pentru orice număr întreg nenul a și pentru orice număr natural $n \geq 2$, puterea a n-a a numărului întreg a sau a la puterea n este produsul a n factori, toți egali cu a. Acest produs se notează cu a^n.

a la puterea *n* →	$a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{\text{de } n \text{ ori}}$	→ *a* este baza puterii, *n* este exponentul puterii

Convenții: $a^0 = 1$; $\quad a^1 = a$; $\quad 0^0$ nu se definește.

- **Reguli de calcul cu puteri**

Regulile de calcul ale puterilor de numere naturale cu exponent natural se extind și la puterile numerelor întregi nenule cu exponenți naturali. Pentru $a, b \in \mathbb{Z}^*$ și $m, n \in \mathbb{N}$:

▸ înmulțirea puterilor care au aceeași bază:	$a^m \cdot a^n = a^{m+n}$	se scrie baza și se adună exponenții
▸ împărțirea puterilor care au aceeași bază:	$a^m : a^n = a^{m-n}, m > n$	se scrie baza și se scad exponenții
▸ puterea unei puteri:	$(a^m)^n = a^{m \cdot n}$	se scrie baza și se înmulțesc exponenții
▸ puterea unui produs:	$(a \cdot b)^n = a^n \cdot b^n$	se ridică fiecare factor al produsului la puterea respectivă
▸ puterea unui cât:	$(a : b)^n = a^n : b^n$	se ridică fiecare factor al câtului la puterea respectivă

- **Compararea puterilor**

Fie a și b două numere întregi și n număr natural nenul:
- dacă n este impar și $a < b$, atunci $a^n < b^n$;
- dacă n este par și $a < b < 0$, atunci $a^n > b^n$;
- dacă n este par și $0 < a < b$, atunci $a^n < b^n$.

Exemple:

$-5 < -3 \Rightarrow (-5)^3 < (-3)^3$

$-4 < -2 < 0 \Rightarrow (-4)^2 > (-2)^2$

$0 < +3 < +5 \Rightarrow (+3)^2 < (+5)^2$

Aplicăm cunoștințele

a) Copiază tabelul în caiet, fă calculele și completează-l.
b) Determină numerele naturale n, elemente ale mulțimii $\{2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$, pentru care: $(-a)^n = a^n$, $(-a)^n = -a^n$.
c) Scrie o condiție plauzibilă, necesară și suficientă, pe care să o îndeplinească n pentru ca:

- $(-a)^n = a^n$, oricare ar fi $a \in \mathbb{Z}$;
- $(-a)^n = -a^n$, oricare ar fi $a \in \mathbb{Z}$.

a	n	a^n	$-a^n$	$(-a)^n$
-3	2	9	-9	9
-3	3			
$+2$	4			
$+2$	5			
-1	6			
-1	7			
-2	8			

Rezolvare:
b) Completând tabelul, observăm că $(-a)^n = a^n$ pentru $n \in \{2, 4, 6, 8\}$ și $(-a)^n = -a^n$ pentru $n \in \{3, 5, 7\}$.
c) Pentru orice număr întreg nenul a și n număr natural:

- $(-a)^n = a^n \Leftrightarrow n$ este par;
- $(-a)^n = -a^n \Leftrightarrow n$ este impar.

Exersează, fixează și aprofundează cunoștințele

1. Copiază tabelul și scrie rezultatele ca puteri/produse de puteri cu exponent natural:

$(-3) \cdot (-3) \cdot (-3) =$	$1 =$
$(-2) \cdot (-2) \cdot (-2) \cdot (-2) \cdot (-2) =$	$0 =$
$-2 =$	$+2 =$
$-1 =$	$(+3) \cdot (+3) \cdot (+2) \cdot (+2) \cdot (+2) \cdot (+2) \cdot (+2) =$

2. Copiază în caiet tabelul și completează-l:

a) $0^4 =$	**b)** $(-15)^1 =$	**c)** $(+3)^1 =$	**d)** $0^7 =$	**e)** $0^{14} =$	**f)** $(-7)^1 =$
g) $(+13)^1 =$	**h)** $0^{11} =$	**i)** $(-3)^0 =$	**j)** $(-5)^1 =$	**k)** $(+6)^0 =$	**l)** $0^{33} =$
m) $33^0 =$	**n)** $1^{33} =$	**o)** $33^1 =$	**p)** $(33)^1 =$	**q)** $(-33)^0 =$	**r)** $(-1)^{11} =$

3. Folosind regula $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$, calculează:
a) $(-3)^3 \cdot (-3)^2$; **b)** $(+7) \cdot (+7)^3$;
c) $(-5) \cdot (-5) \cdot (-5)^4$; **d)** $(-4)^1 \cdot (-4)^2 \cdot (-4)^3 \cdot (-4)^0$.

4. Folosind regula $a^m : a^n = a^{m-n}$, calculează:
a) $(-3)^4 : (-3)^2$; **b)** $(+7)^4 : (+7)^3$; **c)** $11^{24} : 11^{22}$;
d) $32^{125} : 32^{124}$ **e)** $(-13)^5 : (-13)^5$; **f)** $(-1)^{84} : (-1)^{13}$.

5. Folosind regula $(a \cdot b)^n = a^n \cdot b^n$, calculează:
a) $[(-2) \cdot (+3)]^3$; **b)** $[3 \cdot (-5)]^2$; **c)** $[5 \cdot (-2)]^3$;
d) $[(-2) \cdot 7]^0$; **e)** $[(-13) \cdot 11 \cdot (-7)]^1$; **f)** $[(-4) \cdot (-1) \cdot 2]^3$.

6. Folosind regula $a^n : b^n = (a : b)^n$, calculează:
a) $17^2 : (-17)^2$; **b)** $(-25)^3 : (-5)^3$; **c)** $(-361)^2 : 19^2$;
d) $(324)^2 : (-18)^2$; **e)** $(1331)^3 : (-121)^3$; **f)** $(123)^{15} : (-123)^{15}$.

7. Folosind regula $(a^m)^n = a^{m \cdot n}$, calculează:
a) $[(-2)^2]^4$; **b)** $(5^1)^0$; **c)** $[(-2)^3]^2$;
d) $(13^0)^1$; **e)** $(3^2)^3$; **f)** $[(-1)^5]^{12}$.

8. **a)** Calculează $a : b$ pentru $a = (-16)^{20}$ și $b = (-32)^{15}$ și $b : a$ pentru $a = (-9)^{14}$ și $b = (-27)^{10}$.
b) Calculează $(-1)^n$ pentru n număr natural par și pentru n număr natural impar.
c) Folosind punctul precedent și regula $(a \cdot b)^n = a^n \cdot b^n$, arată că $(-34)^{15} = -34^{15}$.

9. Compară numerele întregi a și b pentru:
a) $a = (+2)^{17}$ și $b = (+2)^{31}$; **b)** $a = (-5)^{17}$ și $b = (-5)^{31}$; **c)** $a = (-2)^{38}$ și $b = (-3)^{38}$;
d) $a = (-4)^{47}$ și $b = (-8)^{31}$; **e)** $a = (-9)^{51}$ și $b = (-3)^{103}$; **f)** $a = (-5)^{23}$ și $b = (-2)^{18}$.

AUTOEVALUARE

10 min

1. Încercuieşte litera corespunzătoare răspunsului corect. **4 puncte**

a) Produsul $(-3)^8 \cdot (-3)^2$ este egal cu:

A. $(-3)^{8+2}$; B. $(-3)^{8-2}$; C. $(-3)^{8 \cdot 2}$; D. $(-3)^{8:2}$.

b) Conform regulilor de calcul cu puteri, câtul împărţirii $9^{34} : 3^{34}$ este egal cu:

A. $9^{34} - 3^{34}$; B. $(9 - 3)^{34}$; C. $(9 : 3)^{34}$; D. $(9 + 3)^{34}$.

2. Uneşte, prin săgeţi, fiecare enunţ aflat în coloana din stânga cu răspunsul corespunzător aflat în coloana din dreapta. **4 puncte**

a) $a^4 \cdot a^2 =$	1) 1;
b) $a^4 : a^2 =$	2) $(2a)^2$;
c) $(a \cdot a)^2 =$	3) a^2;
d) $(a : a)^2 =$	4) a^4;
	5) a^6.

3. Completează caseta cu răspunsul corect. **1 punct**

Rezultatul calculului $[(-3)^{15} \cdot (-3)^{35}]^2$ este egal cu numărul întreg 3^x, unde x este $\boxed{}$.

Din oficiu: 1 punct

III.1.6. ORDINEA EFECTUĂRII OPERAŢIILOR ŞI FOLOSIREA PARANTEZELOR

Rezolvăm împreună

Se consideră expresia numerică $E = (-5)^2 \cdot (+12) - (-10) : (+2)$ care pune în evidenţă: patru numere întregi (−5, +12, −10 şi +2), o operaţie de ridicare la putere, o operaţie de înmulţire, o operaţie de scădere şi o operaţie de împărţire.

a) Efectuează operaţiile în ordinea în care sunt scrise.

b) Efectuează operaţiile în următoarea ordine: ridicarea la putere, înmulţirea, împărţirea şi scăderea.

Rezolvare:

a) $E = (-5)^2 \cdot (+12) - (-10) : (+2)$	Efectuăm operaţia de ridicare la putere.
$= 25 \cdot (+12) - (-10) : (+2)$	Efectuăm operaţia de înmulţire.
$= (+300) - (-10) : (+2)$	Efectuăm operaţia de scădere.
$= (+310) : (+2)$	Efectuăm operaţia de împărţire.
$= +155$	
b) $E = (-5)^2 \cdot (+12) - (-10) : (+2)$	Efectuăm operaţia de ridicare la putere.
$= 25 \cdot (+12) - (-10) : (+2)$	Efectuăm operaţia de înmulţire.
$= (+300) - (-10) : (+2)$	Efectuăm operaţia de împărţire.
$= (+300) - (-5)$	Efectuăm operaţia de scădere.
$= +305$	

Observaţii:

- Rezolvarea anterioară a condus la rezultate diferite deoarece, deşi expresia numerică E este aceeaşi, la fiecare dintre cerinţe prioritatea operaţiilor a fost alta. Prin urmare, într-o expresie numerică (care conţine numere şi operaţii aritmetice) trebuie stabilită prioritatea operaţiilor. Acest lucru se realizează folosind în expresiile numerice paranteze rotunde, drepte şi acolade şi stabilind prioritatea operaţiilor, a căror respectare este obligatorie. În acest fel este exclusă obţinerea unor rezultate diferite.
- În mulţimea numerelor întregi, ordinea efectuării operaţiilor este aceeaşi cu ordinea efectuării operaţiilor în mulţimea numerelor naturale.
- În mulţimea numerelor întregi, parantezele rotunde se folosesc şi pentru a pune în evidenţă numerele întregi.

Reține!

- O expresie numerică se calculează efectuând mai întâi ridicările la putere, apoi înmulțirile și împărțirile (în ordinea în care sunt scrise) și după aceea adunările și scăderile (în ordinea în care sunt scrise).
- Într-o expresie numerică în care apar paranteze, se efectuează mai întâi calculele din parantezele rotunde, apoi cele din parantezele pătrate și după aceea cele din acolade.

Exersează, fixează și aprofundează cunoștințele

1. Calculează:
a) $2 \cdot (+10) - 10$; **b)** $(-4 + 6 - 8 + 1) \cdot 3$; **c)** $-40 : (-5) - (-6)$;
d) $(-3) \cdot (-11) - 22 : (-2)$; **e)** $(-3) - (-5)^2 + (-20) : (-4)$; **f)** $4 \cdot [7 - (-3^2 + 6) \cdot (+2)]$.

2. Calculează:
a) $5 \cdot (-6) - (-20)$; **b)** $99 - (-5) \cdot (-19)$; **c)** $10 \cdot (-12) + (-7) \cdot (-15)$;
d) $2 \cdot (-3) \cdot (-4) - (-4) \cdot (-3) \cdot (-2)$; **e)** $50 \cdot [(-4) \cdot (+5) - (-10) \cdot (+2) - (-3)]$.

3. Calculează:
a) $(-21) : (-7) + 7$; **b)** $23 - (+75) : (-5)$; **c)** $(-8) : (+2) - (-18) : (-3)$;
d) $400 : (-75 - 125)$; **e)** $(-900 + 450) : (-90 + 45)$; **f)** $(-400) : (75 - 175)$.

4. Calculează:
a) $3 \cdot (-6) + 6 \cdot (-3) + 35$; **b)** $15 : (-6 + 1) + 24 : (8 - 14)$; **c)** $1 - 2 \cdot [-3 + 4 \cdot (-5 + 6)]$;
d) $[(-6 - 7 \cdot 2) : 10 + 9] \cdot 3$; **e)** $[4 - (-3 + 91 : 7) : (-5)] : (-2)$; **f)** $2^3 + (-3)^2 + (-2) \cdot (+3)$.

5. Calculează: **a)** $(-3^2 + 2^3)^2 + 3^3 - (-2)^2$; **b)** $[(-4 : 2^2 - 9 : 3^2 - 1^3) \cdot (-3^5 : 3^3 + 1)] : (-5^2 + 1)$;
c) $(-1 + 2 - 3 + 4 - 5 + 6 - 7 + 8 - 9) : (-1 + 2 + 3 - 4 + 5)$.

6. Dacă $a = 2 \cdot (-1) - 3$ și $b = 2 \cdot (-2) - (-5) \cdot (-6)$, calculează $a \cdot b$ și $a \cdot (-17) + 3 \cdot b$.

7. **a)** Știind că $a = -13$ și $a \cdot b + a = -182$, calculează numărul întreg b.
b) Știind că $a = -14$ și $a \cdot b + a \cdot c = 182$, calculează suma numerelor întregi b și c.
c) Știind că $b + c = 15$ și $a \cdot b + 15 \cdot a + a \cdot c = -60$, determină numărul întreg a.

8. Scrie în ordine crescătoare numerele: $a = (-1)^2 + (-1)^3 + (-1)^4 + (-1)^{2 \cdot 3 \cdot 4}$, $b = (-3)^3 + (-3)^7 : 81 - (-4)^3$ și $c = 8 - (-2 \cdot 3)^2 + [(-2)^3]^2 : (-3^2 \cdot 7 - 1)$.

9. Efectuați calculele:
a) $(-2)^{31} : 2^{29} - (-2)^{25} : 4^{12}$; **b)** $17 \cdot (17^3 - 17^2 \cdot 16 - 17 \cdot 16 - 16)$;
c) $31 \cdot 33 : [(-2 \cdot 3^2)^2 - (-3^2 - 2^3)]$; **d)** $-8 - |-12| + |-6^2 + 5^2| - |-7 \cdot 17 + 2^7|$;
e) $[(-3)^{11} \cdot (-3)^9 : 3^{18} - 10]^{2017} + (-1)^{2018}$; **f)** $-1024 : [-750 : (-25) - (-3)^3 + 7]$.

AUTOEVALUARE

10 min

1. Încercuiește litera corespunzătoare răspunsului corect. **4 puncte**
a) Rezultatul calculului $[8 - 16 : 2^2 \cdot (-3)] + 4 + 2 \cdot (-3)$ este egal cu: **A.** -12; **B.** 18; **C.** 2; **D.** -3.
b) Rezultatul calculului $\{[(-2)^3]^2 + 2^6\}^2$ este egal cu: **A.** 2^{10}; **B.** 2^{14}; **C.** 2^{12}; **D.** 2^{24}.

2. Unește, prin săgeți, fiecare enunț aflat în coloana din stânga cu răspunsul corespunzător aflat în coloana din dreapta. **4 puncte**

a) $6 - 2^2 \cdot (-6) : 3 =$	**1)** 10;
b) $(6 - 2^2) \cdot (-6) : 3 =$	**2)** 14;
c) $6 - 2^2 \cdot 3 : (-6) =$	**3)** -4;
d) $[6 - 2^2 \cdot (-6)] : 3 =$	**4)** 8;
	5) -8.

3. Completează caseta cu răspunsul corect. **1 punct**
Rezultatul calculului $[(-3)^2 + (-4)^2]^2 - 5 \cdot (-15)$ este egal $\boxed{}$. **Din oficiu: 1 punct**

Exerciții și probleme recapitulative

1. Stabilește valoarea de adevăr a propozițiilor:
a) $+2 \in \mathbb{Z}$; **b)** $-2 \in \mathbb{Z}$; **c)** $+5 \in \mathbb{N} \cap \mathbb{Z}$; **d)** $-11 \in \mathbb{Z} \setminus \mathbb{N}$;
e) $4{,}5 \notin \mathbb{Z}$; **f)** $-1{,}2 \in \mathbb{Z}$; **g)** $\mathbb{N} \cap \mathbb{Z} = \mathbb{Z}$; **h)** $\mathbb{N} \cap \mathbb{Z} = \mathbb{N}$;
i) $\mathbb{N} \cup \mathbb{Z} = \mathbb{N}$; **j)** $\mathbb{N} \cup \mathbb{Z} = \mathbb{Z}$; **k)** $\mathbb{Z} \setminus \mathbb{N} = \varnothing$; **l)** $\mathbb{N} \setminus \mathbb{Z} = \varnothing$.

2. Fie mulțimea $M = \left\{-3; +1,(3); -5; 0; +4; -1; 3; \frac{1}{2}\right\}$. Scrie mulțimile enumerând elementele fiecăreia: $A = \{x \mid x \in M$ și $x \in \mathbb{N}\}$, $B = \{x \mid x \in M$ și $x \in \mathbb{Z}\}$, $C = \{x \mid x \in M$ și $x \in \mathbb{Z} \setminus \mathbb{N}\}$.

3. Reprezintă pe axa numerelor elementele mulțimilor:
a) $A = \{x \mid x \in \mathbb{Z}$ și $-4 < x \le 3\}$; **b)** $B = \{x \mid x \in \mathbb{Z}, x \ge -4$ și $x \notin \mathbb{N}\}$;
c) $C = \{x \mid x \in \mathbb{Z}$ și $-5 \le x \le 2$ sau $-2 \le x \le 5\}$; **d)** $D = \{x \mid x \in \mathbb{Z}$ și $-5 \le x \le 2$ și $-2 \le x \le 5\}$.

4. Fie mulțimea $M = \{-3, +2, -5, 7, -1, 0, -6, +4\}$. Scrie elementele mulțimilor:
a) $A = \{x \mid x \in M$ și $|x| = x\}$; **b)** $B = \{x \mid x \in M$ și $|x| = -x\}$;
c) $C = \{x \mid x \in M$ și $|x| \le 3\}$; **d)** $D = \{x \mid x \in M$ și $|x| > 3\}$.

5. Știind că x este un număr întreg negativ, calculează:
a) $|x| + |-2 + x| - |-5| + |+3|$;
b) $|-x| + |2 - x| + |+6| - |-4|$.

6. Determină $x \in \mathbb{Z}$, astfel încât:
a) $|x| < +4$; **b)** $|x| \le 0$; **c)** $3 < |x| < 6$; **d)** $|-x| \le 2$.

7. Calculează:
a) $6 + (-2) + (-4) + (+1)$; **b)** $-8 - (-3) - (+5) - (-1)$;
c) $+5 + (-3) - (-7) + (+2)$; **d)** $-11 + (-9) - (+6 - 2)$.

8. Scrie opusul numărului x, știind că:
a) $x = 10 + (-4) - 17 - (-19)$; **b)** $x = |-2| + |+5| - |-6 + 2| + (-8)$.

9. Se consideră mulțimile: $A = \{x \in \mathbb{Z} \mid -3 \le x < 2\}$, $B = \{y \in \mathbb{Z} \mid -2 \le y < 3\}$, $C = \{x + y \mid x \in A$ și $y \in B\}$.
a) Scrie mulțimile A, B și C prin enumerarea elementelor.
b) Calculează $A \cup B$, $A \cap B$, $B \cup C$, $A \cap C$, $A \setminus B$ și $B \setminus C$.

10. Efectuează, ținând cont de ordinea efectuării operațiilor:
a) $2 \cdot (-1) \cdot (+5) - (-2) \cdot (+3) + 77 : (-11) - 96 : (-6)$;
b) $-100 : (-25) + 7 \cdot (-2) - 18 \cdot (-5) + (-2) \cdot (-3 + 5) - (-10) : (-5)$;
c) $[3^0 + (-3)]^2 \cdot (-6 + 8)^5 \cdot (10 - 12)^6 - 2^{10} \cdot (-3 + 5)^3$;
d) $[(-5 + 8)^4 \cdot 3^6] : 3^3 : (-6 + 3)^4 + (-3)^3 + \{[10 : (-5)]^6 : 64 - 50\} + (-7)^2$.

11. Determină-l pe n, folosind regulile de calcul cu puteri:
a) $(-2)^3 \cdot (-2)^2 = (-2)^n$; **b)** $(-2)^3 : (-2)^2 = (-2)^n$; **c)** $(-2)^3 \cdot (-2)^n = (-2)^5$;
d) $(-3)^n : (-3)^2 = (-3)^5$; **e)** $(-3)^n : (-3)^2 = (-3)^3$; **f)** $(-3)^6 : (-3)^n = (-3)^3$;
g) $[(-5)^2]^n = (-5)^{10}$; **h)** $[(-5)^n]^3 = (-5)^6$; **i)** $(-15)^n : (-5)^n = (-3)^2$.

12. Calculează:
a) $[4^2 \cdot (-2)^5 : 8]^2 : (-16^3)$; **b)** $[(-3)^1 \cdot (-3)^3]^2 : 3^5$; **c)** $(-5^3)^{11} : (-25)^8 : 125^5$;
d) $[24^5 : (-8)^5]^2 : 3^6$; **e)** $(-2^3)^{40} : [(-2)^{27} \cdot 8^{30}]$; **f)** $[(-2)^5 \cdot 5^5]^2 : (-10)^9$.

13. Efectuează calculele:
a) $-100 : [(-8)^2 + (-27)^1 + 432 : (-2 \cdot 3)^2 - (-5)^3 : (-5)^2 - 4]$;
b) $5^3 \cdot \{14 \cdot (-1)^{2023} + (-1)^{2024} - 5 \cdot [5 - 4 : (-2)]\} : 2^3$;
c) $(-5)^{10} : (-5)^9 \cdot (-4)^8 : (-4)^7 \cdot (-7)^6 : (-7)^5 \cdot (-5)^4 : (-5)^3 \cdot (-3)^2 : (-3)$;
d) $(-7)^{10} : (-7)^7 - 7 \cdot \{-7 - 7 \cdot [(-4)^6 : (-4)^5 - (-8)]\} - 2$;
e) $1 - \{2 + (3 - 4) - [6 - (7 - 8) + (9 - 10)] - 11\} + 12$;
f) $(|2^{50} - 3^{75}| + 2^{50}) \cdot (2^{90} + |2^{90} - 3^{60}|) : 3^{135} - 2023^0$.

EVALUARE

Timp de lucru: 50 de minute.

Subiectul I. Dacă apreciezi că afirmația este adevărată, completează căsuța alăturată cu litera A. În caz contrar, completează cu litera F.

(5p) **1.** Rezultatul calculului $(-2-4)^{10} : (-6)^8$ este egal cu 36. ☐

(5p) **2.** Rezultatul calculului $2^{18} - 2^{18} : 2^2 \cdot 3$ este egal cu 2^{16}. ☐

(5p) **3.** Numărul întreg -2 nu se poate scrie ca o diferență dintre un număr pozitiv și un număr negativ. ☐

(5p) **4.** Scăderea numerelor întregi este comutativă. ☐

Subiectul II. Unește, prin săgeți, fiecare cifră corespunzătoare enunțurilor din coloana **A** cu litera care indică răspunsul corect, aflat în coloana **B**.

	A	B
(5p)	**1.** $-5 + 10 - 13 =$	**a)** -20;
(5p)	**2.** $(-3) \cdot (-9) \cdot (+2) : (-6) =$	**b)** -9;
(5p)	**3.** $-11 + 56 : (-7) - (-3)^2 + 2^3 =$	**c)** $+20$;
(5p)	**4.** $(-6)^5 \cdot (-6)^{12} : [(-6)^3]^5 - 6^2 =$	**d)** 0;
		e) -8.

Subiectul III. Alege litera care indică singura variantă corectă.

(5p) **1.** Dacă dintre numerele întregi a, $a+1$, $a+2$ exact două sunt negative, atunci:

A. $a > 0$; **B.** $a + 1 > 0$; **C.** $a + 2 > 0$; **D.** $a - 5 = -7$.

(5p) **2.** Mulțimea numerelor întregi x pentru care $|x| \leq 2$ este egală cu:

A. $\{-2, 2\}$; **B.** $\{0, 1, 2\}$; **C.** $\{-1, 0, 1\}$; **D.** $\{-2, -1, 0, 1, 2\}$.

(5p) **3.** Dacă a și b sunt două numere întregi negative și $a > b$, atunci:

A. $-a > -b$; **B.** $a > -b$; **C.** $-a < -b$; **D.** $-a < b$.

(5p) **4.** Fie a și b două numere întregi, $a < b$ și n un număr natural. Rezultă că $a^n < b^n$:

A. oricare ar fi n; **B.** oricare ar fi n, dacă $a < 0$ și $b < 0$; **C.** oricare ar fi n par; **D.** oricare ar fi n impar.

La subiectele IV și V scrie rezolvările complete.

Subiectul IV. Determină perechile de numere întregi a și b, știind că:

(5p) **a)** $a \cdot b = 3$;

(5p) **b)** $(a - b) \cdot (b + 2) = 7$;

(5p) **c)** $a = 5 : (b + 2)$.

Subiectul V. Se știe că $a \cdot x - a \cdot y = 105$.

(5p) **a)** Dacă $a \cdot y = -5$, calculează $a \cdot x$.

(5p) **b)** Dacă $a = -3$, calculează $x - y$.

(5p) **c)** Dacă $x - y = 21$, calculează a.

Se acordă 10 puncte din oficiu. Nota se obține împărțind punctajul final la 10.

Subiectul	I.1	I.2	I.3	I.4	II.1	II.2	II.3	II.4	III.1	III.2	III.3	III.4	IV.a	IV.b	IV.c	V.a	V.b	V.c
Punctajul																		
Nota																		

III.2. ECUAȚII ȘI INECUAȚII

III.2.1. Ecuații în mulțimea numerelor întregi

Rezolvăm, observăm și descoperim cunoștințe noi

1. Determină numerele întregi din mulțimea $M = \{-2, 0, 4\}$, care au proprietatea că diferența dintre număr și pătratul lui este egală cu triplul numărului.

Rezolvare: Dacă x este un număr întreg din mulțimea $M = \{-2, 0, 4\}$, care are proprietatea că $x - x^2 = 3x$, sunt posibile următoarele situații:

i) dacă $x = -2$, atunci	$\left.\begin{array}{l}(-2)-(-2)^2=-6\\ 3\cdot(-2)=-6\end{array}\right\}$	egalitatea $(-2) - (-2)^2 = 3 \cdot (-2)$ este adevărată;
ii) dacă $x = 0$, atunci	$\left.\begin{array}{l}0-0^2=0\\ 3\cdot 0=0\end{array}\right\}$	egalitatea $0 - 0^2 = 3 \cdot 0$ este adevărată;
iii) dacă $x = 4$, atunci	$\left.\begin{array}{l}4-4^2=-12\\ 3\cdot 4=12\end{array}\right\}$	egalitatea $4 - 4^2 = 3 \cdot 4$ nu este adevărată.

Rezultă că în mulțimea $M = \{-2, 0, 4\}$ există două numere întregi, -2 și 0, care au proprietatea din enunț. Altfel spus, în mulțimea M există două numere care verifică egalitatea $x - x^2 = 3x$. Despre $x - x^2$ și $3x$ se spune că sunt *membrii* egalității.

2. Se consideră mulțimea $M = \{-1, 0, 2, 4\}$ și egalitatea $6x - 2 = 3x + 4$, unde $x \in M$.

a) Găsește numerele din mulțimea M care verifică egalitatea.

b) Adună la ambii membri ai egalității același număr, de exemplu numărul -3. Găsește numerele din mulțimea M care verifică egalitatea rezultată.

c) Trece termenii -2 și $3x$ dintr-un membru al egalității $6x - 2 = 3x + 4$ în celălalt, cu semn schimbat. Găsește numerele din mulțimea M care verifică egalitatea rezultată.

d) Înmulțește ambii membri ai egalității cu același număr diferit de zero, de exemplu cu 2. Găsește numerele din mulțimea M care verifică egalitatea rezultată.

Rezolvare:

a) Numărul 2 este singurul element din mulțimea M care verifică egalitatea $6x - 2 = 3x + 4$. Într-adevăr, $6 \cdot 2 - 2 = 10$ și $3 \cdot 2 + 4 = 10$, deci $6 \cdot 2 - 2 = 3 \cdot 2 + 4$. Pentru $x = -1$, din $6x - 2 = 3x + 4$ rezultă $6 \cdot (-1) - 2 = 3 \cdot (-1) + 4$, care nu este adevărată, deoarece $6 \cdot (-1) - 2 = -8$ și $3 \cdot (-1) + 4 = 1$. Rezultă că -1 nu verifică egalitatea. La fel se arată că numerele 0 și 4 nu verifică egalitatea.

b) Adunând la ambii membri ai egalității numărul -3, rezultă egalitatea $6x - 2 - 3 = 3x + 4 - 3$, adică $6x - 5 = 3x + 1$, unde $x \in M$.

c) Trecând termenii -2 și $3x$ dintr-un membru al egalității $6x - 2 = 3x + 4$ în celălalt, cu semn schimbat, rezultă egalitatea $6x - 3x = +4 + 2$ sau $3x = 6$, unde $x \in M$.

d) Înmulțind ambii membri ai egalității cu numărul 2, rezultă egalitatea $2 \cdot (6x - 2) = 2 \cdot (3x + 4)$ sau $12x - 4 = 6x + 8$, unde $x \in M$. Ca și la cerința de la punctul a), se arată că 2 este singurul număr din mulțimea $M = \{-1, 0, 2, 4\}$ care verifică egalitățile rezultate mai sus, la punctele b), c) și d).

- Problema 1 de mai sus poate fi reformulată astfel: „Rezolvă în mulțimea $M = \{-2, 0, 4\}$ ecuația $x - x^2 = 3x$" sau, mai simplu: „Rezolvă ecuația $x - x^2 = 3x$, $x \in \{-2, 0, 4\}$".

Despre x se spune că este necunoscuta ecuației. Orice număr din mulțimea M care verifică egalitatea $x - x^2 = 3x$ se numește soluție a ecuației. Numerele -2 și 0 din M verifică egalitatea $x - x^2 = 3x$, deci sunt soluții ale ecuației. Numărul 4 nu verifică egalitatea, deci nu este soluție a ecuației.

Rezolvarea unei ecuații înseamnă găsirea tuturor soluțiilor acesteia.

- Cerința a) de la problema 2 poate fi reformulată astfel: „Rezolvă ecuația $6x - 2 = 3x + 4$, $x \in \{-1, 0, 2, 4\}$”.
  Rezolvarea cerințelor b), c) și d) de la problema 2 au condus la următoarele egalități:

$$6x - 5 = 3x + 1,\ 3x = 6 \text{ și } 12x - 4 = 6x + 8.$$

Pe de altă parte, rezolvarea ecuațiilor $6x - 5 = 3x + 1$, $3x = 6$ și $12x - 4 = 6x + 8$ în mulțimea $M = \{-1, 0, 2, 4\}$, conduc la găsirea soluției 2. Spunem că ecuațiile sunt echivalente și notăm:

$$6x - 5 = 3x + 1 \Leftrightarrow 3x = 6 \Leftrightarrow 12x - 4 = 6x + 8.$$

Reține!

- **Ecuația în mulțimea numerică *M*** este o egalitate cu un element necunoscut din M, care este reprezentat printr-o literă. **Soluție a ecuației** este orice element din mulțimea M pentru care egalitatea este adevărată.
- Două ecuații în aceeași mulțime și care au aceleași soluții se numesc **ecuații echivalente**. Pentru a pune în evidență echivalența celor două ecuații, folosim simbolul matematic $\Leftrightarrow$ (echivalent).
- **Proprietățile ecuațiilor:**
  - dacă adunăm la ambii membri ai unei ecuații același număr, obținem o ecuație echivalentă cu cea dată;
  - dacă într-o ecuație trecem un termen dintr-un membru în altul, cu semn schimbat, rezultă o ecuație echivalentă cu cea dată;
  - dacă înmulțim sau împărțim ambii membri ai unei ecuații cu un număr nenul, obținem o ecuație echivalentă cu cea dată.

  Aplicând succesiv proprietățile ecuației, dintr-o ecuație dată rezultă o ecuație echivalentă cu aceasta, a cărei soluție este imediată.
- **Etapele rezolvării ecuațiilor:**
  - separarea termenilor: se trec termenii care conțin necunoscuta într-un membru al ecuației și termenii liberi (care nu conțin necunoscuta) în celălalt membru al ecuației, schimbând semnele la trecerea dintr-un membru în celălalt;
  - efectuarea calculelor în fiecare membru: după efectuarea calculelor rezultă o ecuație de forma $a \cdot x = b$, unde a și b sunt numere întregi; a este numit coeficientul necunoscutei x, iar b este numit termen liber;
  - obținerea soluției ecuației $a \cdot x = b$: se împart ambii membri ai ecuației la coeficientul necunoscutei (când acesta este diferit de zero și este divizor al termenului liber). În caz contrar (când împărțirea $b : a$ nu are rezultat un număr întreg sau numărul a nu este divizor al numărului b), ecuația nu are soluții în mulțimea numerelor întregi.

Aplicăm cunoștințele

Rezolvă ecuația: $-2t + 9 = 2t + 5$, $t \in \mathbb{Z}$.

Rezolvare: Pentru *rezolvarea ecuației* parcurgem etape succesive, bazate pe proprietățile ecuațiilor:

	Rezolvarea	Etapele rezolvării
1.	$-2t + 9 = 2t + 5$	Trecem termenul +9 din membrul I în membrul II, schimbându-i semnul. Rezultă ecuația 2.
2.	$-2t = 2t + 5 - 9$	Trecem termenul $2t$ din membrul II în membrul I, schimbându-i semnul. Rezultă ecuația 3.
3.	$-2t - 2t = +5 - 9$	Efectuăm calculele. Rezultă ecuația 4.
4.	$-4t = -4$	Împărțim la -4 ambii membri ai ecuației. Rezultă ecuația 5.
5.	$t = 1$	Concluzie: Soluția ecuației este numărul întreg 1 sau mulțimea soluțiilor ecuației este $S = \{1\}$.
	$S = \{1\}$	

Exersează, fixează și aprofundează cunoștințele

1. Completează spațiile punctate, astfel încât să obții propoziții adevărate:

a) A rezolva o ecuație înseamnă ... .

b) Un număr întreg m este soluție a ecuației $-3x + 6 = 0$ dacă ... .

c) Două ecuații se numesc echivalente dacă ... .

2. Verifică dacă -1 este soluție a ecuației:

a) $2 \cdot x + 5 = 2$; **b)** $-2x + 3 = 5$; **c)** $-x + 3x + 5 = 3$.

3. Rezolvă ecuația $2x - 1 = -3$ în mulțimea $A = \{-3, -2, -1, 2\}$.

4. Rezolvă ecuația $-3x + 1 = -8$ în mulțimea $B = \{-1, 0, 1\}$.

5. Rezolvă în $\mathbb{Z}$ ecuațiile:

a) $7x - 14 = 0$; **b)** $4x + 12 = 0$; **c)** $-9x + 27 = 0$; **d)** $-4x - 36 = 0$;

e) $2x - 4 = 10$; **f)** $10 = 7x - 4$; **g)** $6 = 4x - 2$; **h)** $-7 = 4x + 1$.

6. Calculează numărul întreg a știind că:

a) ecuația $x - 3 = a$ are soluția $x = -7$; **b)** ecuația $x = 7 - a$ are soluția $x = 1$;

c) ecuația $ax - 2 = 4$ are soluția $x = -3$; **d)** ecuația $a : x + 5 = -1$ are soluția $x = 2$.

7. Rezolvă în $\mathbb{Z}$ ecuațiile:

a) $9(x - 2) = 63$; **b)** $5(x + 3) = 2(5x - 5)$;

c) $2(4x + 1) = 2(5x - 7)$; **d)** $2(-x + 5) = -8(3x + 2) + 4$;

e) $-4 - \{6 - [-3 + (-3) + (-5 - x) - 7] - 9\} = 1$; **f)** $-10 \cdot \{-2 - 2 \cdot [(-4)^5 : 4^4 - 2]\} = -2x$.

8. Stabilește dacă ecuația are soluții în mulțimea numerelor întregi și rezolvă ecuația în caz afirmativ.

a) $|x + 5| = -10$; **b)** $|12 - 3x| - 2 = -2$; **c)** $|x + 1| + (x + y)^2 = 0$; **d)** $-3|2x + 4| + 5 = -7$.

9. **a)** Descompune în factori primi numărul 143.

b) Rezolvă în $\mathbb{Z}$ ecuația $x^2 - 2x - 143 = 0$.

10. Determină numerele întregi x și y, pentru care $-3x + 2y = x \cdot y - 6$.

AUTOEVALUARE

10 min

1. Dacă apreciezi că afirmația este adevărată, încercuiește litera A. În caz contrar, încercuiește litera F. **4 puncte**

a) Numărul -2 este soluție a ecuației $-x^2 = 4$. **A F**

b) Numărul -2 este soluție a ecuației $x^2 = -4$. **A F**

c) Ecuațiile $-5x = -2x + 6$, $x \in \mathbb{Z}$ și $2x = -4$, $x \in \mathbb{Z}$, sunt echivalente. **A F**

d) Ecuația $(3 - 3) \cdot x + 7 = 7$, $x \in \mathbb{Z}$, nu are soluții. **A F**

2. Încercuiește litera corespunzătoare răspunsului corect. **3 puncte**

a) Ecuația care are soluții în mulțimea numerelor întregi negative este:

A. $2x - 4 = -5$; **B.** $2x - 4 = 5$; **C.** $4 - 2x = 5$; **D.** $3x + 4 = -5$.

b) Ecuația care are soluții în mulțimea numerelor naturale este:

A. $4 - 2x = 6$; **B.** $6 - 2x = 7$; **C.** $2x - 3 = -5$; **D.** $6 - 2x = 4$.

3. Completează caseta cu răspunsul corect. **2 puncte**

Soluția ecuației $x + 3 \cdot (2x - 5) = 6 \cdot (x - 1) - 9$ este numărul întreg egal cu $\boxed{}$.

Din oficiu: 1 punct

III.2.2. Inecuații în mulțimea numerelor întregi

Observăm și descoperim cunoștințe noi

Dacă într-o ecuație înlocuim semnul egal (=) cu unul dintre semnele $<, >, \leq, \geq$, obținem o **inecuație**.

Spre exemplu, dacă considerăm mulțimea $M = \{-1, 0, 2, 3, 4\}$ și ecuația $6x - 2 = 3x + 4$, unde $x \in M$, înlocuind semnul „=" cu semnul „≥", se obține inecuația: $6x - 2 \geq 3x + 4, x \in M$.

A rezolva această inecuație înseamnă a determina numerele x din M, pentru care $6x - 2 \geq 3x + 4$.

Ca și în cazul ecuațiilor, necunoscuta inecuației este x. Termenii care conțin necunoscuta sunt $6x$ și $3x$. Coeficienții necunoscutei sunt numerele întregi 6 și 3. Termenii liberi sunt numerele întregi -2 și $+4$. Membrii inecuației sunt $6x - 2$ și $3x + 4$ (membrul I, respectiv membrul II).

Două inecuații care au aceeași mulțime de soluții sunt inecuații echivalente.

Proprietățile inecuațiilor sunt identice cu proprietățile ecuațiilor, cu excepția înmulțirii sau împărțirii membrilor inecuației cu un același număr negativ.

Reține!

- Două inecuații în care necunoscuta aparține aceleiași mulțimi și care au aceleași soluții se numesc **inecuații echivalente**.
- **Proprietățile inecuațiilor**
  - Dacă adunăm la ambii membri ai unei inecuații același număr întreg, obținem o inecuație echivalentă cu cea dată.
  - Dacă într-o inecuație trecem un termen dintr-un membru în altul cu semn schimbat, obținem o inecuație echivalentă cu cea dată.
  - Dacă înmulțim sau împărțim ambii membri ai unei inecuații cu același număr întreg pozitiv, se păstrează sensul inecuației și obținem o inecuație echivalentă cu cea dată.
  - Dacă înmulțim sau împărțim ambii membri ai unei inecuații cu același număr întreg negativ, se schimbă sensul inecuației și obținem o inecuație echivalentă cu cea dată.
- **Etapele rezolvării inecuațiilor:**
  - separarea termenilor: se trec termenii care conțin necunoscuta într-un membru al inecuației și termenii liberi (care nu conțin necunoscuta) în celălalt membru, schimbându-le semnele;
  - efectuarea calculelor în fiecare membru: după efectuarea calculelor rezultă o inecuație de forma $a \cdot x < b$ sau $a \cdot x > b$ sau $a \cdot x \leq b$ sau $a \cdot x \geq b$, unde a și b sunt numere întregi; a este numit coeficientul necunoscutei x, iar b este numit termen liber;
  - obținerea soluției inecuației $a \cdot x < b$ sau $a \cdot x > b$ sau $a \cdot x \leq b$ sau $a \cdot x \geq b$ (unde a și b sunt numere întregi, $a \neq 0$, b divizibil cu a):
    – se împart ambii membri ai inecuației la coeficientul necunoscutei;
    – atunci când coeficientul necunoscutei este negativ, schimbăm sensul inegalității.

Aplicăm cunoștințele

Rezolvă inecuația: $-2t + 9 \geq 2t + 5, t \in \mathbb{Z}$.

Rezolvare: Pentru rezolvarea inecuației parcurgem etape succesive bazate pe proprietățile inecuațiilor:

1. Trecem termenul $+9$ din membrul I în membrul II, schimbându-i semnul: $-2t \geq 2t + 5 - 9$.
2. Trecem termenul $2t$ din membrul II în membrul I, schimbându-i semnul: $-2t - 2t \geq +5 - 9$.
3. Efectuăm calculele și obținem: $-4t \geq -4$.
4. Împărțim la -4 ambii membri ai inecuației. Rezultă $t \leq 1$.

Concluzie: Mulțimea soluțiilor inecuației este mulțimea numerelor întregi cel mult egale cu 1: $S = \{\ldots, -4, -3, -2, -1, 0, 1\}$.

Observație: La final, deoarece am împărțit ambii membri ai inecuației rezultate la numărul negativ -4, am schimbat sensul inegalității: în loc de „≥" am pus „≤".

Exersează, fixează și aprofundează cunoștințele

1. Verifică dacă numerele –4, 2 și 4 sunt soluții ale inecuației:
a) $-3x + 1 \leq -8, x \in \{-4, 2, 4\}$; **b)** $-3x + 1 \leq -8, x \in \mathbb{N}$; **c)** $-3x + 1 \leq -8, x \in \mathbb{Z}_-$.

2. Rezolvă inecuațiile:
a) $-3x + 1 \leq -8, x \in \{-4, 2, 4\}$; **b)** $-3x + 1 \leq -8, x \in \mathbb{N}$; **c)** $-3x + 1 \leq -8, x \in \mathbb{Z}_-$.

3. Verifică dacă următoarele inecuații au ca soluție numărul 4. Justifică răspunsul.
a) $-2x + 1 \leq -9, x \in \mathbb{N}$; **b)** $3x > 12, x \in \mathbb{N}$; **c)** $-6x + 1 \leq -23, x \in \mathbb{Z}$.

4. Rezolvă în $\mathbb{Z}$ inecuațiile:
a) $7x - 14 < 0$; **b)** $4x + 12 > 0$; **c)** $-9x + 27 \leq 0$; **d)** $-4x - 36 \geq 0$;
e) $2x - 4 \geq 10$; **f)** $10 \leq 7x - 4$; **g)** $6 < 4x - 2$; **h)** $-7 > 4x + 1$.

5. Rezolvă inecuațiile:
a) $x + 2 < 6, x \in \mathbb{N}$; **b)** $-2x + 5 > 17, x \in \mathbb{N}$; **c)** $-4 + 2(4x - 5) < 42, x \in \mathbb{N}$.

6. Calculează cel mai mic număr întreg *a*, știind că acesta este o soluție a inecuației: $-4x + 2 < -6$, $x \in \mathbb{Z}$.

7. Se consideră inecuațiile: $2x + 5 < 9, x \in \mathbb{Z}$ și $2x + 5 > -9, x \in \mathbb{Z}$.
a) Rezolvă fiecare inecuație.
b) Reprezintă pe axa numerelor soluțiile comune celor două inecuații.
c) Dacă *m* este una dintre soluțiile comune celor două inecuații, folosind simbolul „<", scrie în ordine crescătoare numerele 9, *n* și –9, unde $n = 2m + 5$.

8. Rezolvă în $\mathbb{Z}$ inecuațiile:
a) $2(4x + 1) \geq 2(5x - 7)$; **b)** $2(-x + 5) \leq -8(3x + 2) + 4$;
c) $1 - 4 \cdot [-5 \cdot (x - 2)] > 21$; **d)** $5(x - 2) < 7(x + 3) - 35$;
e) $-4 - \{6 - [-3 + (-3) + (-5 - x) - 7] - 9\} \leq 1$; **f)** $-10 \cdot \{-2 - 2 \cdot [(-4)^5 : 4^4 - 2]\} \geq -2x$.

9. **Activitate în perechi.** Rezolvați inecuațiile:
a) $(-2x - 12) \cdot (x - 7) \geq 0, x \in \mathbb{Z}_-$; **b)** $(2x - 12) \cdot (2x + 1) \leq 0, x \in \mathbb{Z}_+$.

10. Rezolvă inecuațiile:
a) $|2x - 5| \leq 3, x \in \mathbb{Z}_-$; **b)** $|-2 - 3x| < 14, x \in \mathbb{Z}_+$; **c)** $|x| + 1 > 2x, x \in \mathbb{Z}^*$.

AUTOEVALUARE

1. Încercuiește litera corespunzătoare răspunsului corect. **4 puncte**
a) Inecuația care are soluții în mulțimea numerelor întregi negative este:
A. $2x - 4 > -4$; **B.** $-3x + 6 < -3$; **C.** $4 - 2x \geq 6$; **D.** $-3x + 4 \leq -8$.
b) Inecuația care are soluții în mulțimea numerelor naturale este:
A. $-2x + 4 > 4$; **B.** $-2x + 2 > 4$; **C.** $3x + 4 \leq -8$; **D.** $4 + 2x \geq 6$.

2. Unește, prin săgeți, fiecare enunț aflat în coloana din stânga cu răspunsul corespunzător aflat în coloana din dreapta. **4 puncte**

a) $-3x + 9 < 0$ este echivalentă cu ...	**1)** $x > -2$;
b) $-6 < 4x + 2$ este echivalentă cu ...	**2)** $x > 3$;
c) $5x - 13 < -3$ este echivalentă cu ...	**3)** $x < 2$;
d) $5x + 3 < 6x - 1$ este echivalentă cu ...	**4)** $x > 4$;
	5) $x < 4$.

3. Completează caseta cu răspunsul corect. **1 punct**
Cel mai mare număr întreg care este soluție a inecuației $x + 4 \cdot (x - 5) \leq 2 \cdot (2x - 1) - 9$ este $\boxed{}$.

Din oficiu: 1 punct

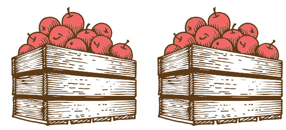
III.2.3. Probleme care se rezolvă cu ajutorul ecuațiilor și inecuațiilor în contextul numerelor întregi

Rezolvăm împreună

Unele probleme din viața cotidiană se pot rezolva cu ajutorul ecuațiilor și inecuațiilor.

Exemple:

1. În două lăzi sunt 96 kg de mere. Se sortează merele și se pun 6 kg din prima ladă în a doua. Se constată că, după sortare, cantitățile de mere din cele două lăzi sunt egale. Câte kilograme de mere au fost la început în fiecare ladă?

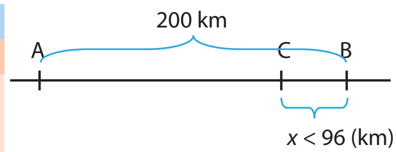


	Rezolvarea problemei	Etapele rezolvării
1.	Notăm cu x cantitatea de mere aflată, la început, în prima ladă.	Stabilirea necunoscutei sau a necunoscutelor
2.	• cantitatea de mere aflată la început în lada a doua era: $96 - x$ (kg); • din prima ladă s-au scos 6 kg și au rămas: $x - 6$ (kg); • cantitatea de mere din a doua ladă a devenit: $96 - x + 6$ (kg). Rezultă ecuația: $x - 6 = 96 - x + 6$.	Obținerea ecuației
3.	$x + x = 96 + 6 + 6 \Leftrightarrow 2x = 108 \Leftrightarrow x = 108 : 2 \Leftrightarrow x = 54$	Rezolvarea ecuației
4.	La început, în prima ladă au fost 54 kg de mere, iar în a doua ladă au fost $96 - 54 = 42$ (kg de mere). După sortare, în prima ladă au fost: $54 - 6 = 48$ (kg), iar în a doua ladă au fost: $42 + 6 = 48$ (kg).	Interpretarea rezultatelor și, eventual, verificarea lor

2. Localitățile A și B se află la o distanță de 200 km una față de alta. În localitatea A se produce făină la prețul de 2500 lei tona, iar în localitatea B se produce făină la prețul de 2564 lei tona. O brutărie se află între cele două localități, în punctul C. Pentru aprovizionarea cu o tonă de făină, brutăria plătește 8 lei pe km. Stabilește condiția sau condițiile ca aprovizionarea cu o tonă de făină a brutăriei să fie mai ieftină, dacă aceasta se face din localitatea B.

Rezolvare: Observăm că un element important al costurilor de aprovizionare îl reprezintă costul transportului. Acest cost depinde de distanța la care se află brutăria față de sursa de aprovizionare cu făină. Notăm cu x distanța dintre brutărie și localitatea B, exprimată în km. Atunci distanța dintre brutărie și localitatea A, exprimată în kilometri, este egală cu $200 - x$.

Costurile de aprovizionare cu o tonă de făină, exprimate în lei, din:	
localitatea A	localitatea B
• cost pentru o tonă de făină: 2500 lei	• cost pentru o tonă de făină: 2564 lei
• cost transport făină: $8 \cdot (200 - x)$	• cost transport făină: $8 \cdot x$
Total: $2500 + 8 \cdot (200 - x)$	Total: $2564 + 8 \cdot x$



Pentru ca aprovizionarea cu o tonă de făină să fie mai ieftină dacă se face din localitatea B trebuie ca: $2564 + 8 \cdot x < 2500 + 8 \cdot (200 - x)$ și din rezolvarea inecuației rezultă că $x < 96$.

Concluzie: aprovizionarea cu făină din localitatea B este mai ieftină numai dacă brutăria se află la o distanță mai mică de 96 km față de această localitate. În caz contrar, aprovizionarea este mai ieftină dacă se face din localitatea A.

Reține!

• **Etapele rezolvării problemelor cu ajutorul ecuațiilor (inecuațiilor):** stabilirea necunoscutei sau a necunoscutelor, obținerea ecuației (inecuațiilor), rezolvarea ecuației (inecuațiilor), interpretarea rezultatelor și, eventual, verificarea lor.

Exersează, fixează și aprofundează cunoștințele

1. La o serbare școlară s-au vândut 415 bilete, unele la prețul de 4 lei, iar altele la prețul de 6 lei, încasându-se 2160 de lei. Calculează câte bilete de fiecare fel au fost vândute.

2. Pentru cumpărăturile efectuate la un supermarket, Radu a plătit la casă suma de 80 de lei în bancnote de 10 lei și de 5 lei. Casierul a numărat în total 11 bancnote. Calculează câte bancnote de 10 lei a primit casierul.

3. Numărul elevilor și personalului dintr-o școală este de 2496. Știind că numărul personalului reprezintă 4% din numărul elevilor, calculează câți elevi are școala.

4. Perimetrul unui triunghi ABC este egal cu 170 cm. Știind că lungimea laturii AC este cu 10 cm mai mare decât lungimea laturii AB, iar lungimea laturii BC este cu 20 cm mai mică decât de două ori lungimea laturii AC, calculează lungimile laturilor triunghiului ABC.

5. Doi elevi au împreună 120 de lei. Dacă suma primului elev ar fi de două ori mai mare, iar a celui de-al doilea ar fi de cinci ori mai mare, ei ar avea împreună 360 de lei. Calculează suma fiecărui elev.

6. Tatăl, mama și fiul au împreună 96 de ani. Tatăl este cu 8 ani mai în vârstă decât mama, iar fiul este cu 20 de ani mai tânăr decât mama. Calculează câți ani are fiecare.

7. Dacă se scade 8 dintr-un număr și se înmulțește diferența cu 12, iar la produsul obținut se adaugă dublul numărului necunoscut, se obține –194. Calculează numărul.

8. Suma a trei numere întregi este –20. După ce se scade din fiecare același număr întreg, suma numerelor devine 4. Calculează numărul care s-a scăzut din numerele inițiale.

9. Dacă la triplul unui număr întreg adunăm 75, se obține 30. Calculează numărul.

10. Dacă din dublul unui număr scădem –24, se obține –30. Calculează numărul.

AUTOEVALUARE

10 min

1. Dacă apreciezi că afirmația este adevărată, încercuiește litera A. În caz contrar, încercuiește litera F. **4 puncte**

a) Dacă produsul a două numere întregi consecutive este egal cu 0, atunci suma celor două numere consecutive poate fi egală cu 1. **A F**

b) Dacă produsul a două numere întregi consecutive este egal cu 0, atunci suma celor două numere consecutive nu poate fi egală cu –1. **A F**

c) Dacă suma a trei numere întregi consecutive este egală cu –3, cel mai mare dintre ele este egal cu 0. **A F**

d) Dacă suma vârstelor a 2 copii este egală cu cel mult 14 ani și unul este cu 2 ani mai mare decât celălalt, atunci cel mai mic are mai mult de 6 ani. **A F**

2. Unește, prin săgeți, fiecare enunț aflat în coloana din stânga cu răspunsul corespunzător aflat în coloana din dreapta. **3 puncte**

a) Dacă un număr întreg se adună cu dublul opusului și rezultatul este –7, atunci numărul întreg este egal cu ...	1) –6;
b) Dacă suma a două numere întregi este 7, iar unul dintre ele este cu 13 mai mare decât celălalt, atunci cel mai mic dintre cele două numere întregi este egal cu ...	2) 7;
c) Dacă diferența dintre un număr întreg x și produsul acestuia cu numărul –12 este egală cu –26, atunci x este egal cu ...	3) –3;
	4) –2.

3. Completează caseta cu răspunsul corect. **2 puncte**

Dacă suma a patru numere întregi consecutive este –18, atunci cel mai mare dintre ele este $\boxed{}$.

Din oficiu: 1 punct

Exerciții și probleme recapitulative

1. Rezolvă în mulțimea numerelor întregi ecuațiile:
a) $7x - 3 = 5x + 11$; **b)** $-2x + 11 = -3x + 5$; **c)** $3x + 10 = 2x + 12$;
d) $-40 - 16x = -6 - 15x$; **e)** $-6x + 20 = 20 - 4x$; **f)** $-2x + 5 = -9 + 5x$.

2. Determină numărul întreg a pentru care ecuația în necunoscuta x are soluția specificată:
a) $x - 5 = a$ are soluția $x = -2$; **b)** $x = 10 - a$ are soluția $x = -1$;
c) $ax + 1 = -5$ are soluția $x = -1$; **d)** $a : x + 7 = +4$ are soluția $x = -3$.

3. Rezolvă în mulțimea numerelor întregi ecuațiile:
a) $|x| = 10$; **b)** $|-x| = |-7|$; **c)** $|x + 2| = 5$; **d)** $|x - 3| = 2$;
e) $|-x + 6| = 4$; **f)** $|2x - 7| = 9$; **g)** $-5 \cdot |x + 2| + 4 = -1$; **h)** $-2|x + 8| = -12$.

4. Rezolvă în $\mathbb{Z}$ ecuațiile:

a) $2 \cdot (x + 1) = -5 \cdot (x + 4) - 7 \cdot (x + 7) + 14 \cdot (x + 2)$;
b) $5 \cdot (x + 3)^0 + 2 \cdot (x + 1) = -6 \cdot (x + 4) + 4 \cdot (2x - 3) + 43$;
c) $-6 - \{6 - [-3 + (-3) + (-5 - x) - 7] - 9\} = -11$;
d) $2 \cdot (x + 5) + 3 \cdot [3 - 2 \cdot (x - 3)] : 3 = 2 \cdot (x + 16) + 1$.

5. Pentru fiecare dintre inecuațiile de mai jos, precizează trei numere întregi care sunt soluții ale inecuației și trei numere întregi care nu sunt soluții ale inecuației:
a) $x - 3 < -4$; **b)** $7x - 6 > -13$; **c)** $5x - 2 \leq 3 \cdot (x + 2)$.

6. Rezolvă în mulțimea numerelor întregi inecuațiile:
a) $3x + 12 \geq 0$; **b)** $-5x + 10 < 0$; **c)** $-7x - 35 \leq 0$;
d) $-2x + 11 \geq 11$; **e)** $x - 8 \leq -3x + 4$; **f)** $x - 6 \geq 4x + 3$.

7. Precizează elementele mulțimii $M = \{-5, 0, -1, 3, -2, 5, 2\}$ care sunt soluții ale inecuației:
a) $x + 4 \leq 7$; **b)** $-x + 1 > 5$; **c)** $-4x \leq 12$;
d) $-5x + 4 \geq -6$; **e)** $4x + 5 \geq -2x - 7$; **f)** $-3x + 3 \geq -2x - 5$.

8. Activitate în perechi. Scrieți mulțimile prin enumerarea elementelor:
a) $A = \{x \in \mathbb{Z} \mid |x| \leq 4\}$; **b)** $B = \{x \in \mathbb{Z} \mid 2 < |x| \leq 6\}$;
c) $C = \{x \in \mathbb{Z} \mid x + 1 > -3 \text{ și } x < 1\}$; **d)** $D = \{x \in \mathbb{Z} \mid 2x + 3 < -3 \text{ și } x > -6\}$.

9. Determină valorile întregi ale lui x, știind că:
a) $x \geq -3$ și $x < 1$; **b)** $x \leq 3$ și $x > -2$; **c)** $-4 < x \leq 2$.

10. Determină numerele întregi negative mai mari decât -4, care verifică inecuația:
a) $x + 1 \leq 3$; **b)** $3x - 4 \leq 5$; **c)** $3x + 3 \leq x - 4$; **d)** $3x - 4 \geq 5x - 10$.

11. Suma a trei numere consecutive este -15. Determină cele trei numere.

12. Dacă înmulțim un număr cu -3, iar rezultatul îl adunăm cu -75, obținem 63. Determină numărul.

13. Suma a două numere este -2023, iar diferența lor este -23. Determină numerele.

14. Doi copii au împreună 170 de lei. Dacă primul ar avea de cinci ori mai mulți lei, iar al doilea ar avea de două ori mai mulți, ei ar avea împreună 490 de lei. Câți lei are fiecare copil?

15. Suma a două numere este -120. Dacă mărim primul număr cu 20 și micșorăm al doilea număr cu 20, atunci primul număr va fi de 4 ori mai mare decât al doilea. Determină numerele.

16. Suma a trei numere întregi este -50. După ce scădem din fiecare același număr întreg, suma numerelor devine 10. Calculează numărul care s-a scăzut din numerele inițiale.

17. Se consideră inecuația $7 + |x| \leq 3 - (-2)^3$. Câte numere întregi pot fi puse în locul lui x?

18. Se consideră numerele $5x - 1$, $x + 5$ și $-6x + 1$. Determină numărul întreg x, știind că suma celor trei numere este 5.

19. Determină numerele întregi negative, știind că prin înmulțirea acestora cu -7 se obțin numere cel mult egale cu 28.

EVALUARE

Timp de lucru: 50 de minute.

Subiectul I. Dacă apreciezi că afirmația este adevărată, completează căsuța alăturată cu litera A. În caz contrar, completează cu litera F.

(5p) **1.** Inecuația $3 - 2x \leq 4$, $x \in \mathbb{Z}_-$, are cel puțin două soluții. ☐

(5p) **2.** Soluția ecuației $6 - 4x = 8 - 2x$, $x \in \mathbb{N}$, este numărul -1. ☐

(5p) **3.** Numerele întregi -2 și 6 sunt soluții ale ecuației $x^2 = 12 + 4x$, $x \in \mathbb{Z}$. ☐

(5p) **4.** Inecuațiile $6 - 2x \leq 4$, $x \in \mathbb{Z}$ și $3x - 2 \geq x - 4$, $x \in \mathbb{Z}$, sunt echivalente. ☐

Subiectul II. Unește, prin săgeți, fiecare cifră corespunzătoare enunțurilor din coloana **A**, cu litera care indică răspunsul corect aflat în coloana **B**.

	A	B
(5p)	**1.** Soluția ecuației $2x + 3 = 24 - x$ este ...	**a)** -7;
(5p)	**2.** Soluția ecuației $-4x = 28$ este ...	**b)** 4;
(5p)	**3.** Soluția ecuației $x : (-4) = -4$ este ...	**c)** 16;
(5p)	**4.** Soluția ecuației $(-32) : (-x) = 8$ este ...	**d)** 7;
		e) -16.

Subiectul III. Alege litera care indică singura variantă corectă.

(5p) **1.** În $\mathbb{Z}$, soluția comună a ecuațiilor $x^2 - 2x = x - 2$ și $2x - 6 = 6 - 4x$ este:

A. 0; **B.** 1; **C.** -2; **D.** 2.

(5p) **2.** În $\mathbb{Z}$, mulțimea soluțiilor comune inecuațiilor $x - 1 \geq -2$ și $x - 1 \leq 2$ este:

A. $\{-1, 3\}$; **B.** $8\ \{1, 2, 3\}$; **C.** $\{0, 1, 2\}$; **D.** $\{-1, 0, 1, 2, 3\}$.

(5p) **3.** Dintre numerele 0, 1, 2, 3 soluție/soluții a/ale ecuației $x^3(x - 6) = -11x^2 + 6x$ este/sunt:

A. numai unul; **B.** doar două; **C.** doar trei; **D.** toate.

(5p) **4.** În $\mathbb{Z}$, numărul soluțiilor ecuației $(x - 1) \cdot (3x + 6) \cdot (-x + 6) = 0$ este egal cu:

A. 1; **B.** 2; **C.** 3; **D.** 4.

La subiectele IV și V scrie rezolvările complete.

Subiectul IV. Două numere întregi x și y au proprietatea că $-4 < x < -2 < y < 0$.

(5p) **a)** Arată că $-3x + 4 > 10$.

(5p) **b)** Calculează produsul $x \cdot y$.

(5p) **c)** Arată că $|x| > |y|$.

Subiectul V. Suma a șapte numere întregi consecutive este egală cu -7.

(5p) **a)** Determină cel mai mic număr întreg dintre cele șapte.

(5p) **b)** Determină cel mai mare număr întreg dintre cele șapte.

(5p) **c)** Calculează produsul numerelor întregi găsite la a) și b).

Se acordă 10 puncte din oficiu. Nota se obține împărțind punctajul final la 10.

Subiectul	I.1	I.2	I.3	I.4	II.1	II.2	II.3	II.4	III.1	III.2	III.3	III.4	IV.a	IV.b	IV.c	V.a	V.b	V.c
Punctajul																		
Nota																		

CAPITOLUL IV

MULȚIMEA NUMERELOR RAȚIONALE

CUPRINS

IV.1. MULȚIMEA NUMERELOR RAȚIONALE

IV.1.1. Număr rațional. Mulțimea numerelor raționale

Observăm și descoperim cunoștințe noi

Cunoștințele despre numere naturale, numere întregi, fracții ordinare și fracții zecimale permit construirea unei noi mulțimi de numere, definirea și studierea operațiilor aritmetice pe această mulțime, precum și completarea cunoștințelor teoretice cu altele noi, utile în multe dintre domeniile activităților umane.

- Știm că, pentru o pereche de numere naturale m și n, $n \neq 0$, fracția ordinară $\frac{m}{n}$ reprezintă un număr rațional. Vom extinde această definiție la perechi de numere întregi. Mai precis, dacă (m, n) este o pereche de numere întregi și $n \neq 0$, spunem că $\frac{m}{n}$ este număr rațional. Mulțimea numerelor raționale se notează cu $\mathbb{Q}$.
- Pe mulțimea $\mathbb{Q}$ a numerelor raționale se definește relația de egalitate astfel: dacă $\frac{m}{n}$ și $\frac{p}{q}$ reprezintă două numere raționale, atunci ele sunt egale prin definiție dacă și numai dacă $m \cdot q = n \cdot p$.

Notăm: $\frac{m}{n} = \frac{p}{q} \overset{def}{\Leftrightarrow} m \cdot q = n \cdot p$.

Observație: Deoarece $\frac{m}{n}$ și $\frac{p}{q}$ sunt numere raționale, se subînțelege că m, n, p și q sunt numere întregi, $n \neq 0$, $q \neq 0$.

Rezolvăm împreună

1. Justifică de ce $\frac{+3}{-2}$ este număr rațional și de ce $\frac{-1}{0}$ nu este număr rațional.

Rezolvare: $\frac{+3}{-2}$ este număr rațional, deoarece numărătorul și numitorul sunt numere întregi, iar $-2 \neq 0$.

Numărul $\frac{-1}{0}$ nu este număr rațional, deoarece numitorul nu este diferit de zero.

2. Verifică următoarele egalități de numere raționale:

a) $\frac{2}{4} = \frac{6}{12}$; **b)** $\frac{-3}{2} = \frac{3}{-2}$; **c)** $\frac{-5}{-6} = \frac{5}{6}$; **d)** $\frac{-1}{-2} = \frac{4}{8}$.

Rezolvare: **a)** $\frac{2}{4} = \frac{6}{12}$, deoarece $2 \cdot 12 = 4 \cdot 6$; **b)** $\frac{-3}{2} = \frac{3}{-2}$, deoarece $(-3) \cdot (-2) = 2 \cdot 3$;

c) $\frac{-5}{-6} = \frac{5}{6}$, deoarece $(-5) \cdot 6 = (-6) \cdot 5$; **d)** $\frac{-1}{-2} = \frac{4}{8}$, deoarece $(-1) \cdot 8 = (-2) \cdot 4$.

Observație: Dacă m și n sunt două numere naturale și $n \neq 0$, atunci $\frac{-m}{-n} = \frac{m}{n}$, $\frac{-m}{n} = \frac{m}{-n}$ și $\frac{m}{-n} = \frac{-m}{n}$.

Numerele raționale $\frac{-m}{n}$ și $\frac{m}{-n}$ fiind egale, vor fi notate cu $-\frac{m}{n}$. Prin urmare, orice număr rațional se poate scrie sub forma $\frac{m}{n}$ sau $-\frac{m}{n}$, unde $m \in \mathbb{N}$, $n \in \mathbb{N}$ și $n \neq 0$. În fiecare dintre aceste scrieri, fracția $\frac{m}{n}$ este o *fracție ordinară* care, prin algoritmul de împărțire, poate fi transformată într-o *fracție zecimală* (*finită* sau *periodică*). Această observație este foarte importantă, deoarece *toate cunoștințele învățate despre fracții ordinare referitoare la amplificare, simplificare, aducere la același numitor și transformarea lor în fracții zecimale, rămân valabile și pentru numere raționale.*

3. Arată că fracțiile $-\frac{1}{2}$, $\frac{3}{-6}$, $-0{,}5$ și $\frac{-7}{14}$ reprezintă același număr rațional.

Rezolvare:

Fracțiile $-\frac{1}{2}$, $\frac{3}{-6}$, $-0{,}5$ și $\frac{-7}{14}$ reprezintă, într-adevăr, același număr rațional deoarece: $\frac{3}{-6}=-\frac{3}{6}{}^{(3}=-\frac{1}{2}$, $-0{,}5=-\frac{5}{10}{}^{(5}=-\frac{1}{2}$ și $\frac{-7}{14}=-\frac{7}{14}{}^{(7}=-\frac{1}{2}$. Deci $-\frac{1}{2}=\frac{3}{-6}=-0{,}5=\frac{-7}{14}$.

4. a) Scrie numerele raționale $\frac{7}{10}, \frac{+2}{+5}, \frac{-4}{-3}, \frac{-5}{+6}, \frac{+3}{-2}, -\frac{25}{12}$ sub formă de fracții zecimale.

b) Scrie numerele raționale –1,(3), 2,(12), –0,25 și 2,1(3) sub formă de fracții ordinare.

c) Arată că numerele raționale $\frac{-5}{-1}$, $\frac{-3}{1}$ și $\frac{17}{-1}$ sunt numere întregi.

Rezolvare:

a) $\frac{7}{10}=0{,}7$; $\frac{+2}{+5}=0{,}4$; $\frac{-4}{-3}=1{,}(3)$; $\frac{-5}{+6}=-0{,}8(3)$; $\frac{+3}{-2}=-1{,}5$; $-\frac{25}{12}=-2{,}08(3)$;

b) $-1{,}(3)=-\frac{13-1}{9}=-\frac{12}{9}{}^{(3}=-\frac{4}{3}$; $2{,}(12)=\frac{212-2}{99}=\frac{210}{99}{}^{(3}=\frac{70}{33}$; $-0{,}25=-\frac{25}{100}{}^{(25}=-\frac{1}{4}$;

$2{,}1(3)=\frac{213-21}{90}=\frac{192}{90}{}^{(6}=\frac{32}{15}$;

c) Cum $\frac{-5}{-1}=\frac{5}{1}=5:1=5$, rezultă că numărul rațional $\frac{-5}{-1}$ reprezintă numărul întreg 5.

Deoarece $\frac{-3}{1}=-\frac{3}{1}=(-3):1=-3$, numărul rațional $\frac{-3}{1}$ reprezintă numărul întreg –3. Analog, numărul rațional $\frac{17}{-1}$ reprezintă numărul întreg –17.

Reține!

- Un **număr rațional** este o pereche de numere întregi *m* și *n*, $n \neq 0$, scrisă sub forma $\frac{m}{n}$. **Mulțimea numerelor raționale** se notează cu $\mathbb{Q}$.
- Două numere raționale $\frac{m}{n}$ și $\frac{p}{q}$ sunt egale prin definiție dacă și numai dacă $mq = np$, adică $\frac{m}{n}=\frac{p}{q} \Leftrightarrow mq=np,\ n\neq 0, q\neq 0$.
- Numerele raționale $\frac{-m}{n}$, $\frac{m}{-n}$ și $-\frac{m}{n}$ sunt egale: $\frac{-m}{n}=\frac{m}{-n}=-\frac{m}{n}$, $n\neq 0$.

▸ Orice număr rațional se poate reprezenta sub formă de fracție ordinară ireductibilă, de forma $\frac{m}{n}$ sau $-\frac{m}{n}$, unde $m \in \mathbb{N}$, $n \in \mathbb{N}$ și $n \neq 0$.

▸ Prin algoritmul de împărțire, orice număr rațional de forma $\frac{m}{n}$ sau $-\frac{m}{n}$, unde $m \in \mathbb{N}$, $n \in \mathbb{N}$ și $n \neq 0$, se poate reprezenta sub formă de fracție zecimală, precedată sau nu de semnul „–".

- Orice fracție zecimală, precedată sau nu de semnul „–”, reprezintă un număr rațional de forma $\frac{m}{n}$ sau $-\frac{m}{n}$, unde $m \in \mathbb{N}$, $n \in \mathbb{N}$ și $n \neq 0$.
- Oricare ar fi un număr întreg m, avem $\frac{m}{1} = m$ (orice număr întreg este număr rațional).
- Orice număr natural este număr întreg și orice număr întreg este număr rațional: $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q}$.

Aplicăm cunoștințele

Scrie câte trei reprezentanți sub formă de fracții ordinare pentru numerele raționale: $\frac{3}{4}, -\frac{2}{3}, -3$.

Rezolvare:

Pentru numărul $\frac{3}{4}$: $\frac{6}{8}, \frac{-3}{-4}, \frac{+3}{4}$; pentru numărul $-\frac{2}{3}$: $-\frac{12}{18}, \frac{2}{-3}, \frac{-2}{3}$; pentru numărul -3: $-\frac{6}{2}, \frac{-9}{3}, \frac{12}{-4}$.

Exersează, fixează și aprofundează cunoștințele

1. Copiază tabelul în caiet și completează în spațiile libere cuvântul „*da*”, atunci când afirmația scrisă în coloana întâi este adevărată, și cuvântul „*nu*”, atunci când afirmația este falsă, urmând modelul.

a	$\frac{4}{3}$	$-\frac{5}{4}$	2	$\frac{-21}{3}$	$\frac{-10}{-2}$	-3	$\frac{11}{20}$	0	$\frac{+39}{+7}$
$a \in \mathbb{N}$	*nu*								
$a \in \mathbb{Z}$	*nu*								
$a \in \mathbb{Z} \setminus \mathbb{N}$	*nu*								
$a \in \mathbb{Q}$	*da*								
$a \in \mathbb{Q} \setminus \mathbb{Z}$	*da*								

2. Scrie următoarele numere raționale sub formă de fracții zecimale:

a) $\frac{9}{2}$; **b)** $\frac{7}{4}$; **c)** $-\frac{15}{8}$; **d)** $\frac{3}{5}$; **e)** $-\frac{7}{10}$; **f)** $\frac{1}{3}$; **g)** $-\frac{1}{6}$; **h)** $\frac{5}{9}$.

3. Scrie următoarele numere raționale sub formă de fracții ordinare ireductibile:

a) 0,24; **b)** 2,8; **c)** –15,625; **d)** 0,(3);
e) –1,(24); **f)** 2,1(3); **g)** 0,(09); **h)** –3,33(6).

4. Se consideră mulțimea $A = \left\{\frac{7}{2}; -\frac{5}{3}; -\frac{9}{4}; +\frac{11}{6}; -1\frac{5}{8}; -\frac{17}{10^2}; \frac{-44}{-72}; \frac{42}{27}\right\}$.

a) Scrie mulțimea *B* prin enumerarea elementelor ei, știind că acestea sunt numere raționale din mulțimea *A*, care se pot scrie ca fracții zecimale finite.

b) Scrie mulțimea *C* prin enumerarea elementelor ei, știind că acestea sunt numere raționale din mulțimea *A*, care se pot scrie ca fracții zecimale infinite.

5. Determină valorile numărului *n* pentru fiecare dintre situațiile:

a) $n \in \mathbb{N}$ și $\frac{14}{n} \in \mathbb{N}$; **b)** $n \in \mathbb{Z}$ și $-\frac{25}{n} \in \mathbb{N}$; **c)** $n \in \mathbb{N}$ și $\frac{10}{6-n} \in \mathbb{Z}$; **d)** $n \in \mathbb{N}, n \leq 10$ și $\frac{30}{n} \in \mathbb{Q} \setminus \mathbb{Z}$.

6. Activitate pe grupe. Determinați numărul întreg *x*, astfel încât următoarele numere să fie întregi:

a) $\frac{7}{x-2}$; **b)** $\frac{10}{3-x}$; **c)** $\frac{-1}{2x-5}$; **d)** $\frac{x+1}{x-1}$.

7. Arată că, oricare ar fi x un număr întreg, numărul $\frac{5-2x}{16}$ nu este număr întreg.

8. Arată că numărul rațional $\frac{\overline{aaa}}{625}$ se scrie ca fracție zecimală finită, oricare ar fi cifra a.

9. Arată că numerele $\frac{n\cdot(n+1)}{2}$ și $\frac{n\cdot(n+1)\cdot(n+2)}{6}$ sunt numere naturale, oricare ar fi n număr natural.

AUTOEVALUARE

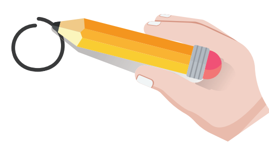
10 min

1. Dacă apreciezi că afirmația este adevărată, încercuiește litera A. În caz contrar, încercuiește litera F. **4 puncte**

a) $\frac{1}{3}=\frac{-1}{-3}$; A F b) $\frac{-5}{-7}=-\frac{5}{7}$; A F c) $\frac{9}{-8}=-\frac{9}{8}$; A F d) $\frac{0}{8}=\frac{0}{-5}$. A F

2. Încercuiește litera corespunzătoare răspunsului corect. **2 puncte**

a) Numărul rațional $-\frac{7}{3}$ este egal cu numărul rațional:



A. $\frac{-7}{-3}$; B. $\frac{7}{-3}$; C. $-2{,}3$; D. $-2\frac{2}{3}$.

b) Numerele raționale $\frac{7}{3}$ și $\frac{9}{2}$ nu sunt egale pentru că:

A. $7\cdot 9\neq 3\cdot 2$; B. $7\cdot 3\neq 9\cdot 2$; C. $7\cdot 2\neq 3\cdot 9$; D. $7\cdot 2\neq 3\cdot 2$.

3. Completează spațiul punctat cu răspunsul corect. **3 puncte**

Numărul rațional $\frac{73}{-15}$ se poate reprezenta prin $-x$, unde x este fracția zecimală periodică mixtă egală cu ... .

Din oficiu: 1 punct

IV.1.2. REPREZENTAREA NUMERELOR RAȚIONALE PE AXA NUMERELOR. OPUSUL ȘI MODULUL UNUI NUMĂR RAȚIONAL. COMPARAREA ȘI ORDONAREA NUMERELOR RAȚIONALE

Ne amintim

Orice număr rațional se poate scrie sub forma $\frac{m}{n}$ sau sub forma $-\frac{m}{n}$, unde $m\in\mathbb{N}$, $n\in\mathbb{N}$ și $n\neq 0$.

Reține!

Numerele raționale de forma $\frac{m}{n}$, unde $m\in\mathbb{N}$, $n\in\mathbb{N}$, $m\neq 0$ și $n\neq 0$, le numim **numere raționale pozitive**, iar numerele raționale de forma $-\frac{m}{n}$, unde $m\in\mathbb{N}$, $n\in\mathbb{N}$, $m\neq 0$ și $n\neq 0$, le numim **numere raționale negative**.

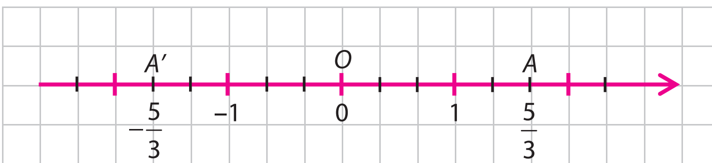
Rezolvăm împreună

Reprezintă pe axa numerelor numerele $\frac{5}{3}$ și $-\frac{5}{3}$.

Rezolvare:

Pentru a reprezenta numărul rațional $\frac{5}{3}$, alegem ca unitate de măsură (u.m.) un segment pe care îl împărțim în trei părți egale. Rezultă că $\frac{1}{3}$ este unitatea fracționară. Fiind un număr pozitiv, numărul rațional $\frac{5}{3}$ se reprezintă pe axa numerelor în dreapta originii, printr-un segment a cărui lungime este egală cu 5 unități fracționare.

Pentru a reprezenta numărul rațional $-\frac{5}{3}$ procedăm exact la fel, numai că acest număr rațional fiind negativ, ca și în cazul unui număr întreg negativ, se desenează pe axă în stânga originii.



Numărului 0 îi corespunde punctul O, care este originea axei numerelor.

Pe axa numerelor, numărului $\frac{5}{3}$ îi corespunde punctul A, iar numărului $-\frac{5}{3}$ îi corespunde punctul A'.

Spunem că punctele A', O și A au coordonatele $-\frac{5}{3}$, 0 și, respectiv, $\frac{5}{3}$. Se scrie $A'\left(-\frac{5}{3}\right)$, $O(0)$ și $A\left(\frac{5}{3}\right)$.

Atunci $OA = OA' = \frac{5}{3}$ u.m., iar despre numerele raționale $-\frac{5}{3}$ și $\frac{5}{3}$ spunem că sunt numere raționale opuse.

Dacă notăm cu x un număr rațional oarecare și cu P punctul corespunzător acestuia pe axa numerelor, atunci modulul numărului rațional x este distanța OP. Notăm $|x| = OP$.

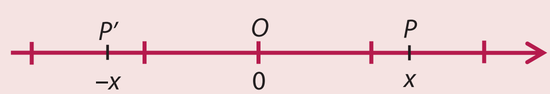
Exemplu: $\left|-\frac{5}{3}\right| = OA' = \frac{5}{3}$ și $\left|\frac{5}{3}\right| = OA = \frac{5}{3}$. Prin urmare, două numere raționale opuse au același modul.

Pentru un număr rațional oarecare notat cu x, opusul acestuia se notează cu $-x$. De asemenea, rezultă că opusul numărului rațional $-x$ este numărul rațional x, adică $-(-x) = x$.

Reține!

- **Opusul unui număr rațional**
  - Opusul unui număr rațional x este numărul rațional $-x$.
  - Opusul numărului rațional $-x$ este numărul rațional x, adică $-(-x) = x$.
- **Reprezentarea numerelor raționale pe axa numerelor**

  Pe axa numerelor, oricărui număr rațional x i se asociază un punct, de exemplu, P. Spunem că punctul P are coordonata x și scriem $P(x)$.
- **Modulul unui număr rațional**



  - Pe axa numerelor, modulul unui număr este egal cu distanța de la origine la reprezentarea acestuia pe axă.
  - Dacă x este un număr rațional, iar pe axa numerelor punctul P are coordonata x și punctul P' are coordonata $-x$, atunci $OP = OP'$. Rezultă: $|x| = |-x|$.
  - Dacă x este un număr rațional, atunci $|x| = \begin{cases} x, & \text{dacă } x \text{ este pozitiv} \\ -x, & \text{dacă } x \text{ este negativ} \end{cases}$ și $|0| = 0$.

- **Mulțimea numerelor raționale negative** se notează cu $\mathbb{Q}_-$, **mulțimea numerelor raționale pozitive** se notează cu $\mathbb{Q}_+$, iar $\mathbb{Q} = \mathbb{Q}_- \cup \{0\} \cup \mathbb{Q}_+$.
- **Compararea și ordonarea numerelor raționale**

▸ Pe mulțimea numerelor raționale se definesc relațiile de inegalitate „<" și „>" (*mai mic* și *mai mare*):
– dintre două numere raționale, cel mai mic este reprezentat pe axa numerelor în stânga celuilalt;
– dintre două numere raționale, unul pozitiv și altul negativ, mai mic este cel negativ;
– dintre două numere raționale negative, mai mic este acela care are modulul mai mare;
– dacă $x, y \in \mathbb{Q}$ și $x < y$, atunci $y > x$;
– oricare ar fi două numere raționale x și y, avem: $x < y$ sau $x = y$ sau $x > y$.

▸ Prin $x \leq y$ se înțelege $x < y$ sau $x = y$. Relația de inegalitate „≤" are următoarele proprietăți:
– este reflexivă: oricare ar fi $x \in \mathbb{Q}$, $x \leq x$.
– este tranzitivă: oricare ar fi $x, y, z \in \mathbb{Q}$, dacă $x \leq y$ și $y \leq z$, atunci $x \leq z$.
– este antisimetrică: oricare ar fi $x, y \in \mathbb{Q}$, dacă $x \leq y$ și $y \leq x$, atunci $x = y$.
– dacă $x, y \in \mathbb{Q}$ și $x \leq y$, atunci $y \geq x$.

▸ Relațiile de inegalitate (<, >, ≤, ≥) între două numere raționale se mai numesc relații de ordine pe mulțimea $\mathbb{Q}$; acestea permit compararea și ordonarea numerelor raționale.

▸ Două numere raționale pozitive x și y se compară după regulile învățate în clasa a V-a.

Aplicăm cunoștințele

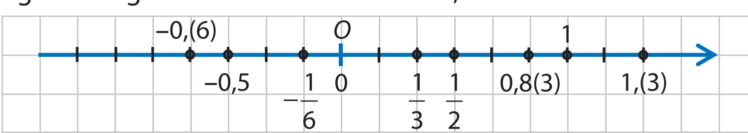
1. a) Reprezintă pe o axă numerele raționale: 0,8(3); 1; 1,(3); –0,5; $\frac{1}{3}$; $\frac{1}{2}$; –0,(6); $-\frac{5}{3}$.

b) Scrie numerele de la subpunctul a) în ordine crescătoare.

Rezolvare:

a) Transformăm fracțiile zecimale în fracții ordinare și le aducem la numitorul comun 6:

$0,8(3) = \frac{5}{6}$; $1 = \frac{6}{6}$; $1,(3) = \frac{8}{6}$; $-0,5 = -\frac{1}{2} = -\frac{3}{6}$; $\frac{1}{3} = \frac{2}{6}$; $\frac{1}{2} = \frac{3}{6}$; $-0,(6) = -\frac{2}{3} = -\frac{4}{6}$. Unitatea fracționară este $\frac{1}{6}$. Alegem ca unitate de măsură un segment de 3 cm, pe care îl împărțim în șase părți egale, atunci $\frac{1}{6}$ din lungimea segmentului este 3 cm : 6 = 0,5 cm. Rezultă următoarea reprezentare pe axă:



b) Pe axa numerelor, *dintre două numere raționale, cel mai mic este reprezentat în stânga*. Rezultă ordonarea crescătoare a numerelor raționale date: $-0,(6) < -0,5 < -\frac{1}{6} < \frac{1}{3} < \frac{1}{2} < 0,8(3) < 1 < 1,(3)$.

2. Compară numerele raționale $-\frac{11}{6}$ și $-\frac{9}{5}$.

Rezolvare:

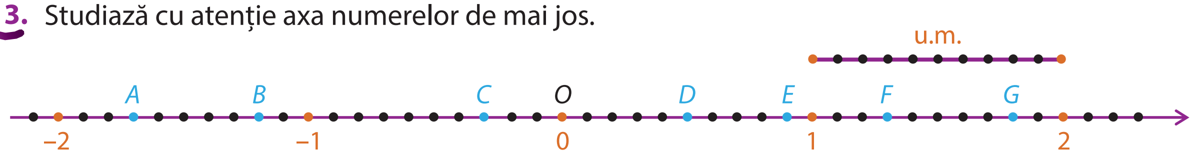
Deoarece numerele raționale date sunt amândouă negative, comparăm modulele lor: $\left|-\frac{11}{6}\right| = \frac{11}{6}$ și $\left|-\frac{9}{5}\right| = \frac{9}{5}$. Pentru a compara $\frac{11}{6}$ și $\frac{9}{5}$ aducem fracțiile la același numitor, 30. Rezultă: $\frac{11}{6} = {}^{5)}\frac{11}{6} = \frac{55}{30}$ și $\frac{9}{5} = {}^{6)}\frac{9}{5} = \frac{54}{30}$. Cum 55 > 54, rezultă că $\frac{11}{6} > \frac{9}{5}$, de unde $\left|-\frac{11}{6}\right| > \left|-\frac{9}{5}\right|$. Prin urmare, $-\frac{11}{6} < -\frac{9}{5}$ (*dintre două numere raționale negative, mai mic este acela care are modulul mai mare*).

Exersează, fixează și aprofundează cunoștințele

1. Se consideră mulțimile $A = \{-4, 0, 2\}$, $B = \{-2, -1, 3\}$ și C este mulțimea numerelor raționale de forma $\frac{m}{n}$, unde $m \in A$ și $n \in B$. Scrie mulțimea C prin enumerarea elementelor acesteia, apoi determină numărul elementelor mulțimilor $C \cap \mathbb{Q}_+$ și $C \cap \mathbb{Q}_-$.

2. Reprezintă pe axa numerelor punctele care au coordonatele -2; $\frac{6}{3}$; $-1{,}5$; $\frac{3}{2}$; $-\frac{5}{6}$; 0; 1; $-\frac{1}{3}$; $\frac{2}{3}$.

3. Studiază cu atenție axa numerelor de mai jos.



a) Scrie sub formă de fracții zecimale coordonatele punctelor A, B, C, D, E, F, G din figură.
b) Scrie sub formă de fracții ordinare coordonatele punctelor A, B, C, D, E, F, G din figură.

4. Calculează și scrie rezultatul sub formă de fracție ordinară ireductibilă:

a) $|-3{,}2|$; **b)** $\left|\frac{25}{8}\right|$; **c)** $|12{,}3(1)|$; **d)** $\left|\frac{3}{-4}\right|$; **e)** $\left|-\left(-\frac{2}{3}\right)\right|$; **f)** $\left|\frac{-18}{-13}\right|$.

5. **a)** Scrie în ordine crescătoare numerele: $-2{,}4$; $+3{,}2$; $-3{,}8$; $+1{,}(3)$; 0; $-4\frac{1}{2}$; $-\frac{100}{20}$.

b) Scrie în ordine descrescătoare numerele: $-2{,}13$; $-2{,}31$; $-3{,}12$; $+1{,}32$; $+3{,}21$; $-1{,}23$.

6. Compară numerele raționale și completează căsuța cu unul dintre simbolurile <, >, =, astfel încât afirmațiile să fie adevărate:

a) $\frac{16}{15} \square 1{,}0(6)$; **b)** $-19{,}6 \square 6{,}7$; **c)** $-\frac{34}{33} \square -1{,}03$; **d)** $\frac{14}{9} \square \frac{8}{5}$; **e)** $-\frac{9}{7} \square -\frac{32}{25}$.

7. Pentru fiecare dintre numerele raționale de mai jos, găsește două numere întregi consecutive, unul mai mic sau egal și altul mai mare decât numărul dat.

a) 3,14; **b)** $\frac{19}{3}$; **c)** $-6{,}(7)$; **d)** $-\frac{32}{7}$; **e)** $-32{,}6(7)$; **f)** -1.

AUTOEVALUARE

10 min

1. Dacă apreciezi că afirmația este adevărată, încercuiește litera A. În caz contrar, încercuiește litera F. **3 puncte**

a) $\frac{1}{3} \geq \frac{-1}{-3}$; A F **b)** $\frac{-5}{-7} < -\frac{5}{7}$; A F **c)** $\frac{7}{8} > \frac{5}{6}$; A F **d)** $-\frac{5}{12} < -\frac{2}{5}$. A F

2. Încercuiește litera corespunzătoare răspunsului corect. **3 puncte**

a) Între numerele raționale $-\frac{17}{5}$ și $-1{,}7(2)$ există n numere întregi. Despre n putem spune că:

A. $n = 1$; **B.** $n = 2$; **C.** $n = 3$; **D.** $n \geq 4$.

b) Dacă x este un număr rațional negativ, atunci:

A. $|-x| = x$; **B.** $|-x| = -x$; **C.** $|-x| = -(-x)$; **D.** $|-x| \neq |x|$.

3. Completează spațiul punctat cu răspunsul corect. **3 puncte**

Pe axa numerelor, cu originea în punctul O, se alege ca unitate de măsură un segment cu lungimea egală cu 1 dm și prin punctele A și B se reprezintă numerele raționale $\frac{8}{5}$, respectiv $-1{,}6$. Dacă M și N sunt două puncte, astfel încât $MN = 5 \cdot OA + OB$, atunci lungimea segmentului MN este egală cu ... cm.

Din oficiu: 1 punct

IV.1.3. Adunarea și scăderea numerelor raționale. Proprietăți

Operația de adunare a numerelor raționale se reduce la operații cu numere întregi.

La fel ca în mulțimea numerelor întregi, **operația de scădere** a numerelor raționale se definește cu ajutorul operației de adunare. Astfel, pentru a se obține diferența dintre numărul rațional *a* și numărul rațional *b* se efectuează suma numărului *a* cu opusul numărului *b*, adică: $a - b = a + (-b)$.

Rezolvăm împreună

Calculează:

a) $0{,}75 + 5{,}25 + 6{,}75$;

b) $(-2{,}7) + (-3{,}7) + (-1{,}4)$;

c) $(-4{,}3) + 3$;

d) $-3{,}1 + 4{,}9$;

e) $\left(-\frac{1}{22}\right) + 1{,}(18)$.

Rezolvare:

a) $0{,}75 + 5{,}25 + 6{,}75 = \underbrace{0{,}75 + 5{,}25}_{6} + 6{,}75 = 12{,}75$;

b) $(-2{,}7) + (-3{,}7) + (-1{,}4) = -(2{,}7 + 3{,}7 + 1{,}4) = -7{,}8$;

c) $(-4{,}3) + 3 = -|4{,}3 - 3| = -1{,}3$;

d) $-3{,}1 + 4{,}9 = +|4{,}9 - 3{,}1| = 1{,}8$;

e) $\left(-\frac{1}{22}\right) + 1{,}(18) = \frac{-1}{22} + \frac{13}{11} = \frac{-1 + 2 \cdot 13}{22} = \frac{-1 + 26}{22} = \frac{25}{22}$.

Observăm și descoperim cunoștințe noi

▸ Rezolvarea subpunctelor a), b), c) și d) arată că, pentru a calcula o sumă de numere raționale, procedăm exact ca la calcularea sumelor de numere întregi: operațiile se fac cu modulele numerelor raționale, iar semnul se stabilește după regulile cunoscute de la numere întregi.

▸ Dacă cel puțin unul dintre termenii unei sume este un număr rațional (subpunctul e)), reprezentat printr-o fracție zecimală periodică, este obligatoriu să reprezentăm numerele raționale prin fracții ordinare.

Reține!

- **Adunarea numerelor raționale**

▸ Pe mulțimea $\mathbb{Q}$ a numerelor raționale, se definește suma a două numere raționale: suma a două numere raționale *a* și *b* este un număr rațional, notat $a + b$. Numerele *a* și *b* se numesc termenii sumei.

▸ Termenii unei sume de numere raționale pot fi reprezentați prin fracții ordinare sau fracții zecimale.

▸ Operația prin care se obține suma a două numere raționale se numește adunarea numerelor raționale.

- **Scăderea numerelor raționale**

▸ Pe mulțimea $\mathbb{Q}$ a numerelor raționale, se definește diferența a două numere raționale: pentru a se obține diferența dintre numărul rațional *a* și numărul rațional *b* se efectuează suma numărului *a* cu opusul numărului *b*, adică: $a - b = a + (-b)$.

▸ Operația prin care se obține diferența a două numere raționale se numește scăderea numerelor raționale.

- **Proprietățile adunării numerelor raționale**

Deoarece adunarea și scăderea numerelor raționale se reduc la operații cu numere întregi, proprietățile adunării numerelor raționale sunt similare proprietăților adunării numerelor întregi:

▸ Adunarea numerelor raționale este asociativă:

$(a + b) + c = a + (b + c)$, oricare ar fi numerele raționale *a*, *b* și *c*.

▸ Numărul rațional 0 este element neutru la adunarea numerelor raționale:

$a + 0 = 0 + a = a$, oricare ar fi numărul rațional *a*.

- Orice număr rațional a are un opus, notat $-a$. Opusul numărului rațional $-a$ este numărul rațional a, adică $-(-a) = a$.

$$a + (-a) = (-a) + a = 0, \text{ oricare ar fi numărul rațional } a.$$

- Adunarea numerelor raționale este comutativă:

$$a + b = b + a, \text{ oricare ar fi numerele raționale } a \text{ și } b.$$

- Definiția opusului unui număr rațional, definiția diferenței a două numere raționale și proprietatea de asociativitate permit simplificarea scrierii termenilor unei sume prin eliminarea unor paranteze:
  - dacă o paranteză este precedată de semnul „+”, se renunță la paranteză, iar termenii din interiorul parantezei se scriu cu semnele lor;
  - dacă o paranteză este precedată de semnul „–”, se renunță la paranteză, iar termenii din interiorul parantezei se scriu cu semne schimbate.
- **Adunarea unui termen la o egalitate și scăderea unui termen dintr-o egalitate**

  Oricare ar fi numerele raționale a, b și c:
  - dacă $a = b$, atunci $a + c = b + c$;
  - dacă $a = b$, atunci $a - c = b - c$.

  (Dacă la o egalitate adunăm sau scădem același termen, egalitatea se păstrează.)
- **Adunarea unui termen la o inegalitate și scăderea unui termen dintr-o inegalitate**

  Oricare ar fi numerele raționale a, b și c:
  - dacă $a < b$, atunci $a + c < b + c$;
  - dacă $a < b$, atunci $a - c < b - c$.

  (Dacă la o inegalitate adunăm sau scădem același termen, inegalitatea se păstrează.)

Exersează, fixează și aprofundează cunoștințele

1. Calculează numărul rațional care este:

a) opusul numărului $\frac{7}{12}-\left(-\frac{1}{6}\right)$; **b)** modulul numărului $-\frac{1}{3}-\left(-\frac{1}{6}\right)$;

c) cu $\frac{2}{3}$ mai mare decât $\frac{7}{6}$; **d)** cu 5 mai mic decât $-\frac{4}{5}$.

2. Calculează: **a)** $\frac{1}{5}+\left(-\frac{1}{5}\right)$; **b)** $-\frac{7}{3}+\left(+\frac{5}{3}\right)$; **c)** $\frac{11}{4}-\left(-\frac{1}{4}\right)$; **d)** $-\frac{2}{5}+\left(-\frac{7}{5}\right)$.

3. Calculează: **a)** $\frac{2}{2}+\left(-\frac{7}{5}\right)-\left(-\frac{1}{15}\right)$; **b)** $-\frac{1}{7}+\left(-\frac{3}{14}\right)-\left(-\frac{1}{2}\right)$; **c)** $\frac{1}{6}-\left(-\frac{1}{4}\right)+\frac{5}{12}-\left(+\frac{7}{3}\right)$.

4. Se consideră numerele raționale: $a=-1+\left(-\frac{3}{4}\right)$ și $b=-4\frac{1}{5}+4{,}1$. Calculează: $a+b$ și $b-a$.

5. Fie mulțimea $M=\left\{-\frac{1}{5},\frac{24}{-3},\frac{-15}{-5},\frac{17}{10},-0{,}5,\frac{1}{2},7\right\}$. Calculează suma elementelor mulțimii:

a) $M \cap \mathbb{Z}$; **b)** $M \setminus \mathbb{Z}$; **c)** M; **d)** $M \cap \mathbb{N}$.

6. Calculează:

a) $0{,}2-(+5{,}3)-(-4{,}1)$; **b)** $3{,}5+2+(-10{,}6)+(+0{,}4)$; **c)** $2{,}(3)+3{,}5+1{,}(6)$;

d) $-2{,}(3)+1\frac{1}{3}-(-1)$; **e)** $6{,}1+\left[-1{,}(6)\right]-4{,}1+\left(+\frac{2}{3}\right)$; **f)** $2{,}25+\frac{10}{7}-3\frac{5}{28}$.

7. Calculează:

a) $\frac{1}{2}+\left[\frac{1}{4}+\left(-\frac{1}{8}\right)\right]$; **b)** $-\frac{1}{3}+\left[-\frac{1}{6}+\left(-\frac{1}{9}\right)\right]$; **c)** $\frac{19}{36}+\left\{\left[0{,}(4)+\left(-\frac{37}{24}\right)\right]+\left(-\frac{5}{18}\right)\right\}$.

8. Calculează:

a) $1,8(3)+\left(-5,2+\dfrac{5}{6}\right)+\left[-0,41(6)+(2)\right]$; **b)** $-\dfrac{11}{101}+\left(-\dfrac{37}{110}\right)+\left(+\dfrac{112}{101}\right)+\left(-\dfrac{346}{220}\right)$.

9. Calculează $\dfrac{1}{n+1}-\dfrac{1}{n}$, $n\in\mathbb{N}^*$, apoi suma $S=1-\left(\dfrac{1}{1\cdot 2}+\dfrac{1}{2\cdot 3}+\dfrac{1}{3\cdot 4}+...+\dfrac{1}{9\cdot 10}\right)$.

10. Calculează suma $S=1-\left(\dfrac{1}{1\cdot 12}+\dfrac{1}{12\cdot 23}+\dfrac{1}{23\cdot 34}+...+\dfrac{1}{89\cdot 100}\right)$.

AUTOEVALUARE

10 min

1. Dacă apreciezi că afirmația este adevărată, încercuiește litera A. În caz contrar, încercuiește litera F. **4 puncte**

a) Dacă x este un număr întreg negativ, atunci $|x|-x=0$. **A** **F**

b) Dacă x este un număr întreg pozitiv, atunci $|x|+(-x)=0$. **A** **F**

c) Dacă x este un număr întreg, atunci $-x+\left[-(-x)\right]=0$. **A** **F**

d) Dacă x este un număr întreg, atunci $(-x)-x=0$. **A** **F**

2. Încercuiește litera corespunzătoare răspunsului corect. **4 puncte**

a) Rezultatul calculului $-\dfrac{8}{5}+0,3+\left(-\dfrac{72}{60}\right)+1,0(3)$ este egal cu:

A. $-\dfrac{24}{15}$; **B.** $\dfrac{24}{15}$; **C.** 1,4(6); **D.** $-\dfrac{22}{15}$.

b) Rezultatul calculului $-\dfrac{13}{5}+(-1,4)$ este egal cu:

A. 2,4; **B.** –2,4; **C.** –2,6; **D.** –4.

3. Completează spațiul punctat cu răspunsul corect. **1 punct**

Rezultatul calculului $\dfrac{1}{2}+\left[\dfrac{1}{4}+\left(-\dfrac{1}{8}\right)\right]+0,375$ este egal cu ... .

Din oficiu: 1 punct

IV.1.4. ÎNMULȚIREA ȘI ÎMPĂRȚIREA NUMERELOR RAȚIONALE. PROPRIETĂȚI

Observăm și descoperim cunoștințe noi

Regulile de calcul privind calculul unui produs de fracții ordinare sau de fracții zecimale (exemplificate anterior) pot fi extinse și la calcularea unui produs de numere raționale. De asemenea, se păstrează regula de calcul a unui cât de două numere raționale.

Pentru stabilirea semnului unui produs sau al unui cât de numere raționale se aplică aceleași reguli de la numere întregi:

$(+)\cdot(+)=(+)$; $(+)\cdot(-)=(-)$; $(-)\cdot(+)=(-)$; $(-)\cdot(-)=(+)$;

$(+):(+)=(+)$; $(+):(-)=(-)$; $(-):(+)=(-)$; $(-):(-)=(+)$.

Exemplu: $\dfrac{-9}{8}:\dfrac{27}{16}=-\dfrac{9}{8}\cdot\dfrac{16}{27}=-\dfrac{\cancel{9}^{1}}{\cancel{8}_{1}}\cdot\dfrac{\cancel{16}^{2}}{\cancel{27}_{3}}=-\dfrac{1}{1}\cdot\dfrac{2}{3}=-\dfrac{2}{3}$.

Reține!

- Pentru a calcula **produsul a două numere raționale**, scrise sub formă de fracții ordinare, se înmulțesc numărătorii între ei și numitori între ei:

$$\frac{m}{n}\cdot\frac{p}{q}=\frac{mp}{nq}$$, unde m, n, p și q sunt numere întregi, iar n și q sunt nenule.

Operația prin care se obține produsul a două numere raționale se numește **înmulțirea numerelor raționale**.

Cele două numere raționale care se înmulțesc se numesc factorii produsului.

- Pentru a calcula **câtul a două numere raționale**, scrise sub formă de fracții ordinare, se înmulțește prima fracție cu inversa celei de a doua:

$$\frac{m}{n}:\frac{p}{q}=\frac{m}{n}\cdot\frac{q}{p}$$, unde m, n, p și q sunt numere întregi nenule.

Operația prin care se obține câtul a două numere raționale se numește **împărțirea numerelor raționale**.
Cele două numere raționale care se împart se numesc factorii împărțirii (deîmpărțit și împărțitor).

Numărul rațional $\frac{q}{p}$ este numit **inversul** numărului rațional $\frac{p}{q}$.

- **Proprietățile înmulțirii numerelor raționale**

Oricare ar fi numerele raționale a, b și c avem:

$(a\cdot b)\cdot c=a\cdot(b\cdot c)$	asociativitate
$1\cdot a=a\cdot 1=a$	1 este element neutru pentru înmulțire
$a\cdot b=b\cdot a$	comutativitate
$a\cdot(b+c)=a\cdot b+a\cdot c$ $a\cdot(b-c)=a\cdot b-a\cdot c$	distributivitate față de adunare și scădere

Orice număr rațional nenul a are un invers care se notează cu $\frac{1}{a}$ sau cu a^{-1} și $a\cdot\frac{1}{a}=\frac{1}{a}\cdot a=1$ sau $a\cdot a^{-1}=a^{-1}\cdot a=1$.

- **Înmulțirea și împărțirea unei egalități cu un factor**

Oricare ar fi numerele raționale a, b, c:

- dacă $a=b$, atunci $a\cdot c=b\cdot c$;
- dacă $a=b$ și $c\neq 0$, *atunci* $a:c=b:c$;

(La înmulțirea sau la împărțirea unei egalități cu un factor nenul, egalitatea se păstrează.)

- **Înmulțirea și împărțirea unei inegalități cu un factor**

Oricare ar fi numerele raționale a, b și c:

- dacă $a<b$ și $c>0$, atunci $a\cdot c<b\cdot c$;
- dacă $a<b$ și $c>0$, atunci $a:c<b:c$;

(La înmulțirea sau la împărțirea unei inegalități cu un factor pozitiv se păstrează sensul inegalității.)

- dacă $a<b$ și $c<0$, atunci $a\cdot c>b\cdot c$;
- dacă $a<b$ și $c<0$, atunci $a:c>b:c$.

(La înmulțirea sau la împărțirea unei inegalități cu un factor negativ se schimbă sensul inegalității.)

Aplicăm cunoștințele

1. Calculează $-\frac{3}{5}\cdot\left(\frac{1}{9}-\frac{4}{3}\right)$ în două moduri.

Rezolvare:

Modul I. Efectuăm calculele respectând *regulile de folosire a parantezelor și ordinea efectuării operațiilor*, care sunt identice cu cele de la operațiile cu numere întregi:

$$-\frac{3}{5}\cdot\left(\frac{1}{9}-\frac{4}{3}\right)=-\frac{3}{5}\cdot\left(\frac{1}{9}-{}^{3)}\frac{4}{3}\right)=-\frac{3}{5}\cdot\left(\frac{1}{9}-\frac{12}{9}\right)=-\frac{\cancel{3}^{1}}{5}\cdot\frac{1-12}{\cancel{9}^{3}}=-\frac{1}{5}\cdot\frac{-11}{3}=\frac{11}{15}.$$

Modul II. Aplicăm distributivitatea înmulțirii față de scădere:

$$-\frac{3}{5}\cdot\left(\frac{1}{9}-\frac{4}{3}\right)=\left(-\frac{3}{5}\right)\cdot\frac{1}{9}-\left(-\frac{3}{5}\right)\cdot\frac{4}{3}=-\frac{\cancel{3}^{1}}{5}\cdot\frac{1}{\cancel{9}^{3}}+\frac{\cancel{3}^{1}}{5}\cdot\frac{4}{\cancel{3}^{1}}=-\frac{1}{15}+\frac{4}{5}=\frac{-1}{15}+{}^{3)}\frac{4}{5}=\frac{-1+12}{15}=\frac{11}{15}.$$

2. În figura alăturată, un întreg, reprezentat prin segmentul AB, a fost împărțit în 21 de părți egale. Punctul C împarte întregul în două părți: AC este *partea cea mare* și BC este *partea cea mică*.

a) Calculează raportul dintre întreg și partea cea mare.
b) Calculează raportul dintre partea cea mare și partea cea mică.
c) Compară rezultatele obținute.

Rezolvare:

a) Observăm că BC are 8 unități fracționare și AC are 13 unități fracționare. Rezultă că raportul dintre întreg și partea cea mare este $\frac{AB}{AC}=\frac{21}{13}\approx 1{,}6$.

b) Raportul dintre partea cea mare și partea cea mică este $\frac{AC}{BC}=\frac{13}{8}\approx 1{,}6$.

c) Comparând cele două rezultate observăm că $\frac{AB}{AC}=\frac{AC}{BC}$.

Observație: Proporția $\frac{AB}{AC}=\frac{AC}{BC}$ este numită *proporția de aur*. Factorul de proporționalitate se notează cu litera grecească φ (phi). Acest număr este numit *numărul de aur*.

Exersează, fixează și aprofundează cunoștințele

1. Calculează:

a) $\frac{3}{4}\cdot\left(-\frac{16}{9}\right)$; **b)** $\frac{2}{15}\cdot\left(-\frac{5}{4}\right)$; **c)** $\frac{-7}{5}\cdot\frac{-25}{28}$; **d)** $-\frac{8}{21}\cdot(-9)$.

2. Calculează folosind operația de înmulțire.

a) $\underbrace{\frac{1}{3}+\frac{1}{3}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{3}}_{48\text{ de termeni}}$; **b)** $\underbrace{-\frac{1}{4}-\frac{1}{4}-\frac{1}{4}-\ldots-\frac{1}{4}}_{64\text{ de termeni}}$; **c)** $\frac{7}{15}\cdot\underbrace{\left(-\frac{1}{15}-\frac{1}{15}-\frac{1}{15}-\ldots-\frac{1}{15}\right)}_{225\text{ de termeni}}$.

3. Calculează:

a) $-7\frac{3}{4}\cdot\frac{8}{31}$; **b)** $-4\cdot\frac{3}{16}\cdot\left(-\frac{2}{9}\right)$; **c)** $\frac{-55}{17}\cdot\frac{34}{15}\cdot\left(-\frac{9}{22}\right)$; **d)** $\frac{11}{12}\cdot\left(-\frac{12}{13}\right)\cdot\left(-\frac{13}{14}\right)\cdot\left(+\frac{14}{15}\right)$.

4. Scrie inversele numerelor raționale: $-\frac{4}{3}$, $-3\frac{1}{2}$, 4 și $-0{,}2(3)$.

5. Calculează:

a) $\frac{16}{9}:\frac{8}{3}$; **b)** $-\frac{10}{7}:\frac{15}{21}$; **c)** $-\frac{32}{27}:\left(-\frac{8}{9}\right)$; **d)** $0:\frac{8}{3}$; **e)** $-1:\frac{8}{3}$.

6. Se consideră numerele raționale: $a=\frac{2}{5}$, $b=\frac{4}{3}$ și $c=-4{,}5$.

a) Calculează $a:b$, $b:a$ și arată că *împărțirea numerelor raționale nu este comutativă.*
b) Calculează $(a:b):c$, $a:(b:c)$ și arată că *împărțirea numerelor raționale nu este asociativă.*
c) Calculează $a:(b\pm c)$, $a:b\pm a:c$ *și arată că* $a:(b\pm c)\neq a:b\pm a:c$.

7. Folosind proprietățile înmulțirii numerelor raționale, demonstrează că oricare ar fi numerele raționale a, b și c au loc relațiile: $(b \pm c) : a = b : a \pm c : a$.

8. Calculează:

a) $\left(1+\frac{1}{2}\right)\cdot\left(1+\frac{1}{3}\right)\cdot\left(1+\frac{1}{4}\right)\cdot\ldots\cdot\left(1+\frac{1}{100}\right)$; **b)** $-\left(-1+\frac{1}{2}\right)\cdot\left(-1+\frac{1}{3}\right)\cdot\left(-1+\frac{1}{4}\right)\cdot\ldots\cdot\left(-1+\frac{1}{100}\right)$.

9. Respectând ordinea efectuării operațiilor și folosirea parantezelor, calculează:

a) $-1:\left[-0{,}5+\frac{11}{7}\cdot\left(-\frac{2}{33}-\frac{5}{11}+0{,}8(3)\right)+1\right]$; **b)** $-\frac{1}{3}\cdot\left\{-\frac{18}{19}\cdot\left[0{,}7-0{,}(7)\right]:(-2)+\frac{7}{190}\right\}$.

10. Activitate în perechi. Calculați:

a) $-\frac{7}{3}+\frac{8}{27}\cdot\frac{45}{12}-\frac{1}{24}:\frac{5}{56}+\frac{4}{5}$; **b)** $5\frac{1}{5}:\left[\frac{1}{5}+\frac{14}{3}\cdot\left(2\frac{4}{7}-1\frac{1}{2}\right)\right]$.

AUTOEVALUARE

1. Dacă apreciezi că afirmația este adevărată, încercuiește litera A. În caz contrar, încercuiește litera F. **3 puncte**

a) $\frac{12}{20}:\frac{3}{4}=\frac{4}{5}$; **A** **F** **b)** $-0{,}6:\frac{2}{5}=0{,}06$; **A** **F** **c)** $\frac{5}{3}\cdot\left(-\frac{9}{25}\right)=\frac{3}{5}$. **A** **F**

2. Încercuiește litera corespunzătoare răspunsului corect. **3 puncte**

a) Rezultatul calculului $-5\cdot\left(-5+\frac{1}{5}\right)$ este egal cu:

A. $-5\cdot5-5\cdot\frac{1}{5}$; **B.** $5\cdot5-5\cdot\frac{1}{5}$; **C.** $5\cdot5+5\cdot\frac{1}{5}$; **D.** $5\cdot5+(-5)\cdot\left(-\frac{1}{5}\right)$.

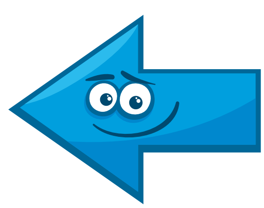
b) Rezultatul calculului $-4:\left(-4+\frac{1}{4}\right)$ este egal cu:

A. $-4:4-\frac{1}{4}:4$; **B.** $4:4-\frac{1}{4}:4$; **C.** $\frac{16}{15}$; **D.** $(-4):(-4)+\frac{1}{4}:(-4)$.

3. Unește, prin săgeți, fiecare enunț aflat în coloana din stânga cu răspunsul corespunzător aflat în coloana din dreapta. **3 puncte**

Dacă $a = 0{,}(3)$ și $b = -\frac{1}{2}$, atunci:

a) $2\cdot a\cdot b = \ldots$	**1)** $-1{,}5$;
b) $b : a = \ldots$	**2)** $-0{,}(6)$;
c) $\frac{2}{a:b} = \ldots$	**3)** -3;
	4) $-0{,}(3)$.



Din oficiu: 1 punct

Proiect pe grupe

Realizați o comparație între proprietățile operațiilor de adunare și înmulțire în mulțimea numerelor naturale, în mulțimea numerelor întregi și în mulțimea numerelor raționale. Notați concluziile voastre, demonstrând prin exemple.

IV.1.5. Puterea cu exponent număr întreg a unui număr rațional nenul. Reguli de calcul cu puteri. Ordinea efectuării operațiilor și folosirea parantezelor

Reține!

- Pentru orice număr rațional nenul a și pentru orice număr natural $n \geq 2$, puterea a n-a a numărului rațional a sau a la puterea n este produsul a n factori, toți egali cu numărul rațional a. Acest produs se notează cu a^n.

a la puterea $n \rightarrow a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{\text{de } n \text{ ori}}$, a este baza puterii, n este exponentul puterii.

Convenții: $a^0 = 1$; $a^1 = a$; 0^0 nu se definește.

- Pentru orice număr rațional nenul a și pentru orice număr natural nenul m se definește **puterea cu exponent întreg negativ a numărului rațional *a*** prin: $a^{-m} = \left(\frac{1}{a}\right)^m$ sau $a^{-m} = (a^{-1})^m$, unde $\frac{1}{a}$ sau a^{-1} este inversul lui a.
- **Reguli de calcul cu puteri**

Regulile de calcul ale puterilor de numere întregi cu exponent natural se extind și la puterile numerelor raționale cu exponenți întregi. Pentru $a, b \in \mathbb{Q}^*$ și $m, n \in \mathbb{Z}$:

înmulțirea puterilor care au aceeași bază:	$a^m \cdot a^n = a^{m+n}$	se scrie baza și se adună exponenții
împărțirea puterilor care au aceeași bază:	$a^m : a^n = a^{m-n}$	se scrie baza și se scad exponenții
puterea unei puteri:	$(a^m)^n = a^{m \cdot n}$	se scrie baza și se înmulțesc exponenții
puterea unui produs:	$(a \cdot b)^n = a^n \cdot b^n$	se ridică fiecare factor al produsului la puterea respectivă
puterea unui cât:	$(a : b)^n = a^n : b^n$	se ridică fiecare factor al câtului la puterea respectivă

Aplicăm cunoștințele

a) Cum se citește scrierea $\left(-\frac{2}{3}\right)^3$? Precizează baza și exponentul puterii. Calculează $\left(-\frac{2}{3}\right)^3$.

b) Cum se citește scrierea $\left(-\frac{2}{3}\right)^{-2}$? Precizează baza și exponentul puterii. Calculează $\left(-\frac{2}{3}\right)^{-2}$.

c) Calculează $\left(-\frac{1}{2}\right)^3 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right)^2$ în două moduri (calculând fiecare putere și efectuând operația indicată / aplicând regulile de calcul cu puteri).

***Rezolvare*:**

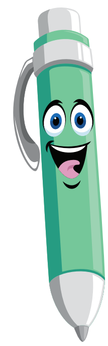
a) Scrierea $\left(-\frac{2}{3}\right)^3$ se citește „$-\frac{2}{3}$ la puterea a treia”. Baza este $-\frac{2}{3}$, iar exponentul este 3.

$$\left(-\frac{2}{3}\right)^3 = \left(-\frac{2}{3}\right) \cdot \left(-\frac{2}{3}\right) \cdot \left(-\frac{2}{3}\right) = \left(\frac{4}{9}\right) \cdot \left(-\frac{2}{3}\right) = -\frac{8}{27}.$$

b) Scrierea $\left(-\frac{2}{3}\right)^{-2}$ se citește „$-\frac{2}{3}$ la puterea –2”. Baza este $-\frac{2}{3}$, iar exponentul este –2.

$$\left(-\frac{2}{3}\right)^{-2}=\left(-\frac{3}{2}\right)^{2}=\frac{(-3)^2}{2^2}=\frac{9}{4}.$$

c) Calculând fiecare putere rezultă: $\left(-\frac{1}{2}\right)^3\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)^2=\left(-\frac{1}{8}\right)\cdot\frac{1}{4}=-\frac{1}{32}$. Aplicând regulile de calcul cu puteri rezultă: $\left(-\frac{1}{2}\right)^3\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)^2=\left(-\frac{1}{2}\right)^{3+2}=\left(-\frac{1}{2}\right)^5=\underbrace{\left(-\frac{1}{2}\right)\cdot\ldots\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)}_{5\text{ factori}}=-\frac{1}{32}$.



Reține!

Ordinea efectuării operațiilor și folosirea parantezelor

Pe mulțimea numerelor raționale au fost definite următoarele operații aritmetice:
- adunarea și scăderea;
- înmulțirea și împărțirea;
- ridicarea la putere.

Ordinea efectuării operațiilor este următoarea: întâi se efectuează ridicările la putere, apoi înmulțirile și împărțirile, în ordinea în care sunt scrise, iar în final se efectuează adunările și scăderile, în ordinea în care sunt scrise.

Folosirea parantezelor presupune efectuarea operațiilor cu respectarea ordinii efectuării acestora mai întâi în parantezele rotunde, apoi în parantezele drepte și abia apoi în acolade.

Portofoliu

Realizează o lucrare cu titlul „Operații cu numere raționale. Proprietăți și reguli de calcul”. Ilustrează fiecare proprietate sau regulă de calcul printr-un exemplu.

Exersează, fixează și aprofundează cunoștințele

1. Scrie puterea care are:

a) baza $\frac{1}{4}$ și exponentul –3; **b)** baza –1,(6) și exponentul 3; **c)** baza 0,6 și exponentul 0.

2. Efectuează calculele și scrie rezultatul sub formă de fracție zecimală:

a) $(-1)^{-3}$; **b)** $(-3)^{-2}$; **c)** $\left(-\frac{1}{4}\right)^0$; **d)** $\left(\frac{2}{3}\right)^{-2}$; **e)** $[-0,(6)]^{-3}$; **f)** $\left(-\frac{2}{3}\right)^{-2}$; **g)** $(0,5)^{-4}$.

3. Efectuează calculele:

a) $(-7)^5\cdot\left(-\frac{1}{7}\right)^7$; **b)** $\left(\frac{1}{3}\right)^{10}\cdot 3^4:\left(\frac{1}{3}\right)^3$; **c)** $\left(-\frac{2}{3}\right)^4\cdot\left(-\frac{3}{2}\right)^{-5}:\left[\left(-\frac{2}{3}\right)^5\right]^2$.

Respectând ordinea efectuării operațiilor și folosirea parantezelor, calculează:

4. **a)** $\frac{2}{5}-\frac{1}{2}+\frac{4}{3}-\frac{7}{6}$; **b)** $\frac{4}{5}-\frac{1}{6}-\frac{3}{2}+\frac{2}{15}$; **c)** $\left(\frac{5}{2}-\frac{7}{3}-\frac{5}{6}\right)\cdot\left(-\frac{6}{5}\right)$; **d)** $\frac{7}{3}-\frac{75}{32}\cdot\frac{8}{15}-\frac{14}{18}:\frac{7}{9}-\frac{5}{6}$.

5. **a)** $\left(\frac{19}{7}\cdot\frac{49}{38}-\frac{17}{6}\right):\left(\frac{1}{2}-\frac{12}{25}\cdot\frac{5}{9}\right)$; **b)** $\frac{45}{7}\cdot\left[\left(\frac{3}{4}-\frac{3}{2}+\frac{7}{8}\right)\cdot\left(\frac{5}{6}-\frac{3}{2}+\frac{5}{9}-\frac{1}{3}\right)+\frac{3}{5}\right]$.

6. a) $\left(\frac{5}{3}-\frac{10}{9}-\frac{5}{8}\right)\cdot\left(\frac{33}{70}\cdot\frac{14}{11}-\frac{7}{2}\right)$; b) $1^3\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^0-3\cdot1^2\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^1+3\cdot1^1\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^2-1^0\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^3$.

7. a) $-\frac{4}{5}\cdot\left\{\frac{3}{4}-\frac{10}{7}\cdot\left[-\frac{3}{5}-\frac{3}{14}\cdot\left(\frac{1}{3}-\frac{5}{2}\cdot\frac{6}{10}\right)\right]\right\}$; b) $\frac{7}{3}-\frac{32}{27}\cdot\frac{45}{24}+\frac{1}{24}:\frac{5}{56}-\frac{4}{5}$.

8. a) $\frac{9}{5}\cdot\left\{\frac{12}{5}\cdot\left[\frac{1}{2}-\frac{11}{7}\cdot\left(\frac{2}{33}+\frac{5}{11}-\frac{5}{6}\right)\right]-\frac{7}{3}\right\}$; b) $\frac{3}{5}\cdot\left[\frac{1}{3}+\left(\frac{32}{45}\cdot\frac{5}{24}-\frac{17}{81}\right)\cdot\frac{9}{10}\right]-\frac{1}{2}$.

9. a) $\frac{21}{5}\cdot\left\{\frac{20}{3}\cdot\left[\frac{3}{5}+\left(\frac{5}{21}-\frac{2}{7}+\frac{3}{14}\right):\left(\frac{3}{8}-\frac{2}{3}\right)\right]-\frac{2}{3}\right\}$; b) $\left(-\frac{1}{2}\right)^3\cdot\frac{16}{3}-\left(-\frac{1}{2}\right)^2:\left(\frac{3}{8}\right)$.

10. a) $\left(\frac{5}{3}-\frac{4}{5}-\frac{1}{24}\cdot\frac{56}{5}\right)^2-5^{-2}\cdot\left(-\frac{1}{5}\right)^3:\left(\frac{1}{5}\right)^4$; b) $\left(-\frac{5}{4}\right)^2-2\cdot\left(-\frac{5}{4}\right)\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)+\frac{1}{4}$.

11. a) $-(-1)^{n+1}\cdot\left(-\frac{2}{7}\right)+(-1)^{n+2}\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)$; b) $(-1)^n\cdot\left(-\frac{2}{3}\right)-(-1)^{n+1}\cdot\left(-\frac{1}{3}\right)$.

12. a) $-100\cdot\left[\left(-\frac{2}{5}\right)^3:\frac{4}{25}-\left(-\frac{1}{10}\right)^2\cdot0{,}2^{-2}\right]$; b) $\frac{5^{10}}{9^4}:\left(-\frac{3}{5}\right)^{-8}-(-5)^2$.

13. Calculează $-\frac{1}{3}-\frac{1}{6}:b$, unde b este inversul numărului rațional $6\cdot\left[0{,}25+\left(\frac{7}{36}-\frac{1}{24}\right):\frac{11}{72}\right]$.

AUTOEVALUARE

10 min

1. Dacă apreciezi că afirmația este adevărată, încercuiește litera A. În caz contrar, încercuiește litera F. **4 puncte**

a) $\left(3+\frac{1}{2}\right)^2=3^2+\left(\frac{1}{2}\right)^2$; **A F**

b) $\left(3\cdot\frac{1}{2}\right)^2=3^2\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^2$; **A F**

c) $(2:3)^2=\frac{2^2}{3^2}$; **A F**

d) $2^3+2^4=2^7$. **A F**

2. Încercuiește litera corespunzătoare răspunsului corect. **1 puncte**

a) Rezultatul calculului $(3^4+3^2):3^2$ este egal cu:

A. $3^{4+2}:3^2=3^4$;
B. $3^4:3^2+3^2:3^2=3^2+3^0=10$;
C. $(3\cdot4+3\cdot2):3\cdot2=(12+6):3\cdot2=12$;
D. $(3\cdot4+3\cdot2):(3\cdot2)=(12+6):6=3$.

b) Oricare ar fi a un număr rațional, rezultă:

A. $(2^5\cdot a^3)^2=2^{16}\cdot a^8$; B. $(2^5\cdot a^3)^2=2^{10}\cdot a^5$; C. $(2^5\cdot a^3)^2=2^{10}\cdot a^6$; D. $(2^5\cdot a^3)^2=2^7\cdot a^5$.

3. Unește, prin săgeți, fiecare enunț aflat în coloana din stânga cu răspunsul corespunzător aflat în coloana din dreapta. **4 puncte**

a) $(-0{,}5)^{16}:(-0{,}5)^{-8}=$	1) $(0{,}5)^{24}$;
b) $(-0{,}5)^5\cdot(-0{,}5)^2=$	2) $(-0{,}5)^9$;
c) $[(-0{,}5)\cdot(0{,}5)^2]^3=$	3) $-(0{,}5)^7$;
d) $[(-1{,}5)^2:3^2]^2=$	4) $-(0{,}5)^6$;
	5) $(0{,}5)^4$.

Din oficiu: 1 punct

IV.1.6. Ecuații în mulțimea numerelor raționale. Probleme care se rezolvă folosind ecuații de acest tip

Observăm și descoperim cunoștințe noi

Rezolvă ecuațiile:

a) $3x + 10 = 2 - x, x \in \mathbb{Z}$; **b)** $\frac{3}{2} \cdot x + 10 = \frac{1}{4} - x,\ x \in \mathbb{Q}$.

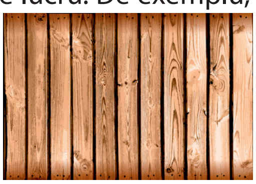
Rezolvare:

	a)	**b)**	*Etapele rezolvării*
	$3x + 10 = 2 - x$	$\frac{3}{2} \cdot x + 10 = \frac{1}{4} - x$	Trecem termenul +10 din membrul I în membrul II și îi schimbăm semnul. Rezultă ecuația (1).
(1)	$3x = 2 - x - 10$	$\frac{3}{2} \cdot x = \frac{1}{4} - x - 10$	Trecem termenul $-x$ din membrul II în membrul I și îi schimbăm semnul. Rezultă ecuația (2).
(2)	$3x + x = 2 - 10$	$\frac{3}{2} \cdot x + x = \frac{1}{4} - 10$	Efectuăm calculele. Rezultă ecuația (3).
(3)	$4x = -8$	$\frac{5}{2} \cdot x = -\frac{39}{4}$	Împărțim ambii membri ai ecuației prin coeficientul necunoscutei. Rezultă ecuația (4).
(4)	$x = (-8) : 4$	$x = -\frac{39}{4} : \frac{5}{2}$	Efectuăm calculele. Rezultă ecuația (5).
(5)	$x = -2\ (x \in \mathbb{Z})$	$x = -3{,}9\ (x \in \mathbb{Q})$	Notând cu S mulțimea soluțiilor ecuației, rezultă (6).
(6)	$S = \{-2\}$	$S = \{-3{,}9\}$	

Analizând rezolvările de mai sus, constatăm că etapele de rezolvare a unei ecuații în mulțimea numerelor raționale sunt analoage etapelor rezolvării unei ecuații în mulțimea numerelor întregi.

Probleme care se rezolvă folosind ecuații

De multe ori, în activitatea curentă, oamenii soluționează unele probleme practice cu ajutorul ecuațiilor. De asemenea, multe dintre științe utilizează ecuațiile ca instrument de lucru. De exemplu, la fizică, toate formulele prin care se exprimă legi ale fizicii sunt, de fapt, ecuații.



1. O scândură cu lungimea de 23,6 cm trebuie tăiată în bucăți, lățimea tăieturii fiind de 0,4 cm. Din motive de economisire a materialelor, scândura va fi tăiată de tâmplar numai dacă prin tăiere se obțin 11 bucăți, fiecare cu lungimea de 2 cm. Ajută tâmplarul să decidă dacă taie sau nu taie scândura.

Rezolvare: *Etapele rezolvării*

Notăm cu x numărul bucăților de scândură care ar rezulta în urma tăierii. ← 1. stabilirea necunoscutei sau a necunoscutelor

- lungimea celor x bucăți de scândură, exprimată în centimetri, este egală cu $2 \cdot x$; ← 2. obținerea ecuației
- cele x bucăți de scândură rezultă în urma a $x - 1$ tăieturi, fiecare cu lățimea de 0,4 cm;
- lungimea scândurii distruse prin tăiere, transformată în rumeguș, este egală cu $0{,}4 \cdot (x - 1)$.

Rezultă ecuația: $2 \cdot x + 0{,}4 \cdot (x - 1) = 23{,}6$.

$2 \cdot x + 0{,}4 \cdot (x - 1) = 23{,}6 \mid \cdot 10$ ← 3. rezolvarea ecuației

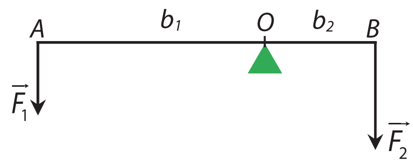
$20 \cdot x + 4 \cdot (x - 1) = 236$

$20 \cdot x + 4 \cdot x - 4 = 236$

$24 \cdot x = 240 \Rightarrow x = 10$ (bucăți de scândură)

Rezultă numai 10 bucăți, deci tâmplarul nu va tăia scândura. ← 4. interpretarea rezultatelor

2. Se consideră o pârghie AB (o bară rigidă) care se poate roti în jurul unui punct fix O (punct de sprijin). Bara de masă neglijabilă și cu lungimea de 4,5 m are punctul de sprijin la distanța $b_1 = 3$ m față de capătul A. La capătul barei acționează forțele $\vec{F_1}$ și $\vec{F_2}$. Știind că $F_1 = 1$ N, calculează mărimea forței $\vec{F_2}$, astfel încât bara să fie în echilibru.



***Rezolvare*:**

Potrivit legilor fizicii, mărimile F_1, F_2 și b_1, b_2 sunt invers proporționale: $F_1 \cdot b_1 = F_2 \cdot b_2$. Deoarece $b_2 = 4{,}5 - 3 = 1{,}5$ m, rezultă ecuația $3 = F_2 \cdot 1{,}5$, din care se obține $F_2 = 2$ N. *Concluzie*: bara este în echilibru dacă mărimea forței $\vec{F_2}$ este de 2 N.

Reține!

- *Rezolvarea unei ecuații se bazează pe proprietățile ecuațiilor, care, la rândul lor, se sprijină pe utilizarea corectă a regulilor de calcul, inclusiv ordinea efectuării operațiilor și folosirea parantezelor.*
- Rezolvarea unei ecuații în mulțimea numerelor raționale conduce la una sau mai multe ecuații simple, a căror rezolvare este imediată:

Ecuația	$x + a = b$	$x \cdot a = b\ (a \neq 0)$	$x : a = b\ (a \neq 0)$	$a \cdot x + b = c\ (a \neq 0)$
Mulțimea soluțiilor	$S = \{b - a\}$	$S = \{b : a\}$	$S = \{b \cdot a\}$	$S = \{(c - b) : a\}$

- *Rezolvarea unei probleme folosind ecuații presupune respectarea strictă a etapelor de rezolvare: stabilirea necunoscutei, obținerea ecuației, rezolvarea ecuației, interpretarea rezultatelor.*

Exersează, fixează și aprofundează cunoștințele

1. Scrie ecuația $a \cdot x + b = c$, cu necunoscuta x, știind că:

a) $a = 2, b = 6, c = 0$; **b)** $a = -2, b = \frac{1}{2}, c = \frac{1}{4}$; **c)** $a = -\frac{3}{5}, b = 0, c = -0{,}8$.

2. Verifică dacă numărul 3 este soluție a ecuației:

a) $-2 \cdot x + 3 = 9$; **b)** $-4 \cdot x + 5 = -7$; **c)** $\frac{1}{3} \cdot x - 8 = 9$.

3. Se consideră ecuația $-\frac{1}{2} \cdot x + 1 = 2$. Stabilește dacă ecuația dată are soluții în mulțimea $A = \left\{-2, 0, \frac{1}{2}\right\}$. Dar în mulțimea numerelor întregi?

4. Rezolvă în mulțimea numerelor naturale ecuațiile:

a) $6 \cdot x - 12 = 0$; **b)** $3 \cdot x + 1 = 10$; **c)** $-x + 5 = 0$; **d)** $4 \cdot x + 7 = 17$;

e) $x : 5 + 1 = 11$; **f)** $3 \cdot x - 8 = x$; **g)** $2{,}1 \cdot x - 4{,}2 = 6{,}3$; **h)** $\frac{x}{2} - 1 = \frac{x}{3} + 1$.

5. Rezolvă în mulțimea numerelor raționale ecuațiile:

a) $3 \cdot x + 7 = -2 \cdot x - 8$; **b)** $6 \cdot x - 2 = 4 \cdot x + 5$; **c)** $2 \cdot (x + 7) = 3 \cdot (4 - x) - 8$;

d) $2 + 3 \cdot (x + 4) = x + 5 \cdot (x - 5)$; **e)** $9 \cdot x - \frac{1}{7} = \frac{10}{14} + 4 \cdot x$; **f)** $\left(\frac{2}{3} - \frac{1}{2}\right) \cdot x = -1$.

6. Determină numărul rațional x pentru care rapoartele formează o proporție:

a) $\frac{x}{4}$ și $\frac{1}{2}$; **b)** $\frac{x+2}{x+3}$ și $\frac{2}{3}$; **c)** $\frac{x}{8}$ și $\frac{x+1}{9}$; **d)** $\frac{x+1}{3}$ și $\frac{x+5}{4}$; **e)** $\frac{3-2x}{5}$ și $\frac{x+1}{9}$.

7. Rezolvă ecuațiile: **a)** $1-\{2-[3-(4-x)]\}=5$; **b)** $-4{,}5+\frac{2}{5}\cdot[1+3\cdot(2\cdot x-1)]=-3-\frac{7}{5}\cdot x$;

c) $\frac{3\cdot x-1}{4}-\frac{6\cdot x+1}{6}=\frac{1-x}{24}$; **d)** $\frac{4}{5}\cdot(3\cdot x-4)+\frac{3\cdot x+2}{2}=1\frac{1}{2}\cdot(x-3)+\frac{4\cdot x+7}{5}$.

8. Prețul unui obiect a scăzut cu 10% și după un timp a crescut cu 10%. Știind că după scumpire obiectul costă 261,36 lei, calculează prețul inițial.

9. Două suprafețe de teren, în formă de dreptunghi, au o latură comună. Primul teren are o latură cu 0,5 m mai mică decât latura comună, iar al doilea teren are o latură de 400 m. Calculează lungimile laturilor celor două terenuri, dacă primul are o suprafață cu 200 m² mai mică decât suprafața celui de-al doilea teren.

AUTOEVALUARE

10 min

1. Dacă apreciezi că afirmația este adevărată, încercuiește litera A. În caz contrar, încercuiește litera F. **4,5 puncte**

a) Numărul $-0{,}5$ este soluție a ecuației $4\cdot x+4\cdot(-x)^2=-1$. **A F**

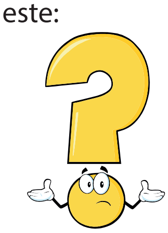
b) Ecuațiile $-0{,}4x+1{,}2=-x$, $x\in\mathbb{Q}$ și $-0{,}25=0{,}5:x$, $x\in\mathbb{Q}$, sunt echivalente. **A F**

c) Ecuația $\left(0{,}5-\frac{1}{2}\right)\cdot x+\frac{1}{3}=\frac{1}{3}$, $x\in\mathbb{Q}$, nu are soluții. **A F**

2. Încercuiește litera corespunzătoare răspunsului corect. **3 puncte**

a) Dintre elementele mulțimii $M=\left\{0,(3),\frac{2}{5},1\frac{1}{2},3\right\}$, soluție a ecuației $\frac{1}{3}\cdot x+\frac{3}{4}=1\frac{1}{4}$ este:

A. 0,(3); **B.** $\frac{2}{5}$; **C.** $1\frac{1}{2}$; **D.** 3.



b) Ecuația care are soluții în mulțimea numerelor naturale este:

A. $\frac{1}{2}-\frac{1}{4}\cdot x=\frac{3}{4}$; **B.** $1-\frac{1}{2}\cdot x=\frac{7}{6}$; **C.** $x-\frac{3}{2}=-\frac{5}{2}$; **D.** $\frac{3}{4}-\frac{1}{4}x=\frac{1}{2}$.

3. Completează spațiul punctat cu răspunsul corect. **1,5 puncte**

Un turist a parcurs două cincimi din lungimea unui traseu. Dacă această lungime este cu 30 km mai mică decât lungimea traseului, atunci traseul are lungimea egală cu ... km.

Din oficiu: 1 punct

Exerciții și probleme recapitulative

1. *Prin înmulțirea sau împărțirea numărătorului și numitorului unui număr rațional dat, reprezentat printr-o fracție, se obține un număr rațional egal cu numărul dat.* Folosind această regulă:

a) dintre numerele raționale: $\frac{3}{4}$; $\frac{4}{10}$; $\frac{-1{,}6}{-4}$; $\frac{-12}{-16}$; $\frac{12}{30}$; $\frac{2}{5}$; $\frac{3}{5}$; $\frac{-2}{-3}$, scrie-le pe cele egale;

b) scrie numerele raționale a și b sub formă de fracție cu numitorul număr natural, diferit de 1, cel mai mic posibil, dacă:

1) $a=\frac{2}{3}$ și $b=-\frac{1{,}25}{1{,}5}$; 2) $a=\frac{3}{5}$ și $b=\frac{-11}{15}$; 3) $a=\frac{0,(3)}{0{,}75}$ și $b=-\frac{5}{6}$.

2. Efectuează calculele și simplifică rezultatele:

a) $-\frac{1}{5}+\frac{4}{-10}$; **b)** $\frac{4}{9}-\frac{4}{18}$; **c)** $\frac{11}{7}-\frac{-6}{14}$; **d)** $\frac{10}{12}-\frac{2}{24}$;

e) $-\frac{-7}{6}-\frac{5}{2}$; **f)** $\frac{-5}{4}+\frac{11}{8}$; **g)** $\frac{2}{5}-\frac{3}{10}$; **h)** $\frac{5}{-5}+\frac{3}{-10}$.

3. Aplică regula semnelor, descompune numărătorul și numitorul fiecărui număr rațional, simplifică și apoi efectuează operațiile:

a) $\frac{55}{14}\cdot\frac{70}{66}\cdot\frac{26}{25}$; **b)** $\frac{42}{20}\cdot\frac{95}{39}\cdot\left(-\frac{8}{19}\right)$; **c)** $\frac{110}{28}\cdot\left(-\frac{35}{33}\right)\cdot\left(-\frac{52}{50}\right)$.

4. Se consideră numerele raționale:

$a_0=\frac{1}{2}$, $a_1=1+\frac{1}{a_0}$, $a_2=1+\frac{1}{a_1}$, $a_3=1+\frac{1}{a_2}$, ..., $a_6=1+\frac{1}{a_5}$, $a_7=1+\frac{1}{a_6}$.

a) Reprezintă numerele raționale a_0 și a_3 prin fracții zecimale finite.

b) Arată că numărul rațional a_1 este număr natural.

c) Reprezintă numerele raționale a_2, a_5 și a_6 prin fracții zecimale periodice.

d) Reprezintă numerele raționale a_4 și a_7 prin fracții ordinare ireductibile.

5. Se consideră numerele raționale $a=\frac{1}{9}-\frac{15}{9}\cdot\frac{1}{6}$ și $b=\left(\frac{4}{3}+\frac{3}{10}\right):\left(\frac{2}{5}-\frac{5}{2}\right)$.

a) Arată că $a=-0,1(6)$.

b) Reprezintă numărul rațional b printr-o fracție ordinară ireductibilă.

6. Se consideră expresia $E=(5-3x)\cdot(9x-4)$. Arată că pentru $x=-0,(3)$ expresia E este un număr întreg negativ.

7. Un proprietar de teren a vândut un sfert din proprietatea sa în anul 2021 și patru cincimi din rest în anul 2022. Calculează:

a) ce fracție din proprietate a vândut în anul 2022;

b) ce fracție din proprietate a rămas nevândută la sfârșitul celor doi ani;

c) suprafața proprietății, știind că partea nevândută după doi ani reprezintă șase hectare.

8. **Activitate în perechi.** Folosind faptul că *dacă la o inegalitate adunăm sau scădem același termen, inegalitatea se păstrează*, demonstrați că:

a) oricare ar fi numerele raționale a și b, dacă $a<b$, atunci $a-b<0$;

b) oricare ar fi numerele raționale a și b, dacă $a-b<0$, atunci $a<b$.

9. Folosind rezultatele din problema precedentă, compară numerele de mai jos, calculând diferența dintre ele:

a) $\frac{3}{4}$ și $\frac{2}{3}$; **b)** $\frac{6}{7}$ și $\frac{9}{10}$; **c)** $\frac{-5}{4}$ și $\frac{-9}{7}$; **d)** $\frac{11}{-7}$ și $\frac{-3}{2}$; **e)** $\frac{23}{7}$ și $\frac{13}{4}$; **f)** $\frac{-3}{20}$ și $\frac{-2}{15}$.

10. Determină cel mai mare număr întreg a și cel mai mic număr întreg b, știind că:

a) dacă $-1<x<3$, atunci $a<2x+1<b$;

b) dacă $-1<x<3$, atunci $a<-2x+4<b$.

11. Se consideră tabelul alăturat, unde x este un număr rațional. Se știe că pe fiecare linie, pe fiecare coloană și pe fiecare diagonală suma numerelor este aceeași.

$-\frac{1}{2}$		
x	$\frac{2}{5}$	
$\frac{7}{4}$		5,5

a) Scrie ecuația a cărei rezolvare permite calcularea numărului rațional x.

b) Rezolvă ecuația scrisă la punctul precedent.

c) Completează căsuțele tabelului.

EVALUARE

Timp de lucru: 50 de minute.

Subiectul I. Dacă apreciezi că afirmația este adevărată, completează căsuța alăturată cu litera A. În caz contrar, completează cu litera F.

(5p) **1.** $\left(-2\frac{3}{5}\right)^{-1}=-2\frac{5}{3}$. ☐

(5p) **2.** Ecuațiile $5x+4=0$ și $3\cdot 4^{-1}\cdot x-1=2x$ sunt echivalente. ☐

(5p) **3.** Cel mai mare dintre numerele raționale $-\frac{5}{6}$ și $-\frac{2}{3}$ este $-\frac{2}{3}$. ☐

(5p) **4.** Opusul numărului rațional $3\cdot\left[\left(-\frac{1}{3}\right)^{3}\cdot\left(-\frac{1}{3}\right)^{-2}\right]$ este numărul natural 1. ☐

Subiectul II. Unește, prin săgeți, fiecare cifră corespunzătoare enunțurilor din coloana **A** cu litera care indică răspunsul corect, aflat în coloana **B**.

A		B
(5p)	**1.** Soluția ecuației $0{,}5x+3=24-\frac{1}{4}x$ este ...	**a)** -21;
(5p)	**2.** Soluția ecuației $-\frac{4}{3}x=28$ este ...	**b)** 6;
(5p)	**3.** Soluția ecuației $x:\left(-\frac{1}{4}\right)=-4$ este ...	**c)** 1;
(5p)	**4.** Soluția ecuației $(-0{,}75):(-x)=1{,}25$ este ...	**d)** 28;
		e) 0,6.

Subiectul III. Alege litera care indică singura variantă corectă.

(10p) **1.** Rezultatul calculului $\left(-\frac{1}{3}\right)^{3}:\left(-\frac{1}{3}\right)^{2}+\frac{2}{3}$ este:

A. 0; **B.** 1; **C.** -1; **D.** 0,(3).

(10p) **2.** Dacă $a=\left(-\frac{3}{4}\right)^{2}\cdot\frac{7}{8}-\left(1:\frac{8}{7}\right)\cdot\frac{3^{2}}{4^{2}}$, atunci:

A. $a\in\mathbb{Q}\setminus\mathbb{N}$; **B.** $a\in\mathbb{Q}\setminus\mathbb{Z}$; **C.** $a\in\mathbb{Z}_-$; **D.** $a\in\mathbb{N}$.

La subiectul IV scrie rezolvarea completă.

Subiectul IV. Se notează cu x un număr rațional. Demonstrează că:

(10p) **a)** dacă $x<\frac{2}{3}$, atunci $2x-1<\frac{1}{3}$;

(10p) **b)** numărul $\frac{2}{3}$ este soluție a ecuației $2x-1=\frac{1}{3}$;

(10p) **c)** dacă $x>-\frac{2}{3}$, atunci $-2x+1<\frac{7}{3}$.

Se acordă 10 puncte din oficiu. Nota se obține împărțind punctajul final la 10.

Subiectul	I.1	I.2	I.3	I.4	II.1	II.2	II.3	II.4	III.1	III.2	IV.a	IV.b	IV.c
Punctajul													
Nota													

CAPITOLUL V

NOȚIUNI GEOMETRICE FUNDAMENTALE

CUPRINS

V.1. UNGHIURI

V.1.1. Unghiuri opuse la vârf. Congruența lor

Rezolvăm împreună

a) Desenează o pereche de semidrepte opuse.
b) Desenează o pereche de unghiuri cu același vârf, ale căror laturi nu formează nicio pereche de semidrepte opuse.
c) Desenează o pereche de unghiuri cu același vârf, ale căror laturi formează o singură pereche de semidrepte opuse.
d) Desenează perechi de unghiuri cu același vârf, ale căror laturi formează două perechi de semidrepte opuse.

Rezolvare:

a) Semidreptele *OA* și *OB* sunt semidrepte opuse (figura 1.a).

Fig. 1.a

b) Unghiurile *AOB* și *COD* au același vârf, dar laturile lor nu formează nicio pereche de semidrepte opuse (figura 1.b).

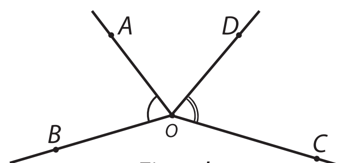


Fig. 1.b

c) Unghiurile *AOB* și *COD* au același vârf, laturile lor formează perechea de semidrepte opuse *OA* și *OC*, iar semidreptele *OB* și *OD* nu sunt opuse (figura 1.c).

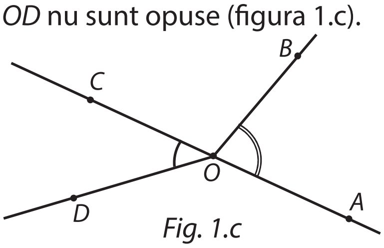


Fig. 1.c

d) Unghiurile *AOB* și *COD* au același vârf, laturile lor formează două perechi de semidrepte opuse *OA* și *OC*, respectiv *OB* și *OD* (figura 1.d).

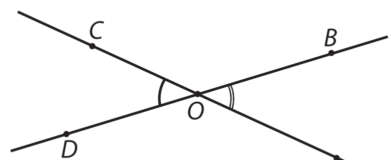


Fig. 1.d

Observăm și descoperim cunoștințe noi

Unghiurile *AOB* și *COD* din figura 1.d sunt *unghiuri opuse la vârf*, deoarece laturile lor, *OA* și *OC*, respectiv *OB* și *OD*, sunt perechi de semidrepte opuse. Unghiurile *AOD* și *BOC* sunt, de asemenea, unghiuri opuse la vârf.

Cum desenăm două unghiuri opuse la vârf?

Desenăm două drepte concurente. Punctul de concurență este vârful a patru unghiuri, ele fiind două câte două opuse la vârf (figura 2).

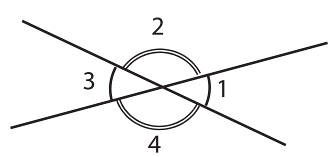


Fig. 2

Folosind un raportor, măsoară unghiurile din figura 2. Vei constata că perechile de unghiuri 1 și 3, respectiv 2 și 4, sunt congruente.

În continuare, vom *demonstra* aceasta folosind *raționamentul*. Demonstrația bazată pe raționament joacă un rol fundamental în matematică. În acest fel se obțin proprietățile figurilor, care, de cele mai multe ori, nu pot fi deduse din desen prin folosirea instrumentelor geometrice.

Demonstrație: Urmărește figura 2. Unghiurile 1 și 2 formează un unghi alungit. La fel și unghiurile 2 și 3. Prin urmare: $\begin{cases} \sphericalangle 1 + \sphericalangle 2 = 180^\circ \\ \sphericalangle 3 + \sphericalangle 2 = 180^\circ \end{cases}$ sau $\begin{cases} \sphericalangle 1 = 180^\circ - \sphericalangle 2 \\ \sphericalangle 3 = 180^\circ - \sphericalangle 2 \end{cases}$. Rezultă că $\sphericalangle 1 \equiv \sphericalangle 3$. Asemănător se demonstrează că $\sphericalangle 2 \equiv \sphericalangle 4$. Demonstrează!

Reține!

- Două unghiuri care au același vârf și laturile perechi de semidrepte opuse se numesc **unghiuri opuse la vârf**.
- Unghiurile opuse la vârf sunt **unghiuri congruente**.

Aplicăm cunoștințele

Mihai dorește să măsoare unghiul *BOC* din figura 3. Așa cum este desenat unghiul, gradațiile raportorului depășesc marginea caietului din dreapta punctului *O*. Scrie pe caiet cum procedează Mihai.

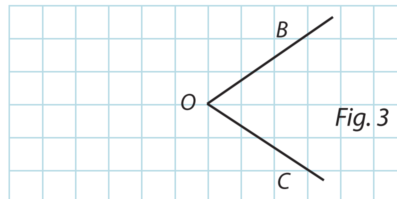


Fig. 3

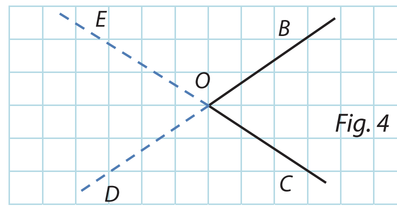


Fig. 4

Rezolvare: În stânga punctului *O*, Mihai desenează, ca în figura 4, semidreapta *OD*, opusă semidreptei *OB*, și semidreapta *OE*, opusă semidreptei *OC*.
Măsoară apoi unghiul *EOD*. Deoarece unghiurile *BOC* și *EOD* sunt unghiuri opuse la vârf, ele au aceeași măsură. Prin urmare, măsura unghiului *BOC* va fi egală cu măsura unghiului *EOD*.

Exersează, fixează și aprofundează cunoștințele

1. În figura 5, precizează:
a) două perechi de semidrepte opuse;
b) două unghiuri alungite;
c) două perechi de unghiuri opuse la vârf.

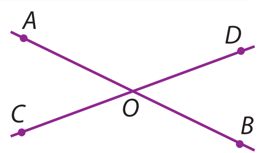


Fig. 5

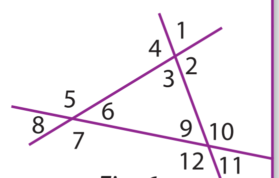


Fig. 6

2. Observă figura 6 și scrie toate perechile de unghiuri opuse la vârf.

3. Se consideră dreptele *MN* și *PQ* concurente în punctul *O*.
a) Știind că $\sphericalangle MOP = 47°$, calculează măsurile unghiurilor *NOP*, *MOQ* și *NOQ*.
b) Știind că $\sphericalangle MOQ = 117°$, calculează măsurile unghiurilor *MOP*, *PON* și *NOQ*.

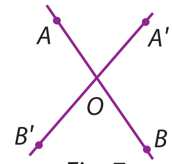
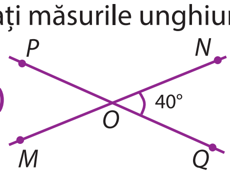
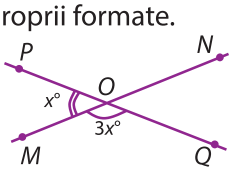


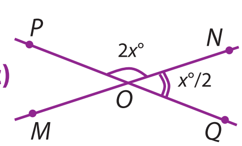
Fig. 7

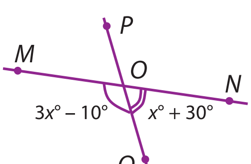
4. În figura 7, dreptele *AB* și *A'B'* sunt concurente în punctul *O*. Determină numărul natural *n*, știind că $\sphericalangle AOA' = (5n - 25)°$ și $\sphericalangle BOB' = 75°$.

5. **Activitate în perechi.** În figurile de mai jos, punctele *M*, *O* și *N*, respectiv *P*, *O* și *Q* sunt coliniare. Calculați măsurile unghiurilor proprii formate.

a)


b)


c)


d)


6. Două drepte concurente formează patru unghiuri, fiecare având vârful în punctul *O*. Calculează măsura fiecărui unghi, știind că:
a) suma măsurilor a două dintre unghiuri este egală cu 120°;
b) suma măsurilor a trei dintre unghiuri este egală cu 225°.

7. Se consideră punctele coliniare *A*, *O*, *B*, cu *O* între *A* și *B*. În unul din semiplanele determinate de dreapta *AB* se consideră punctele *C* și *D*, astfel încât punctul *D* să fie interior unghiului *BOC*. Se notează cu *E* și *F* simetricele punctelor *C* și *D* față de punctul *O*. Dacă $\sphericalangle BOC = 140°$, calculează:
a) măsura unghiului *AOC*; **b)** suma măsurilor unghiurilor *EOF* și *BOD*.

AUTOEVALUARE

1. Încercuiește litera corespunzătoare răspunsului corect. **3 puncte**

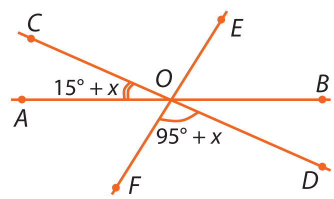
Punctul de intersecție a două drepte concurente este vârful a patru unghiuri.

a) Dacă suma măsurilor a două dintre ele este egală cu 160°, atunci unul dintre cele patru unghiuri are măsura egală cu: **A.** 100°; **B.** 20°; **C.** 60°; **D.** 90°.

b) Dacă suma măsurilor a trei dintre ele este egală cu 250°, atunci unul dintre cele patru unghiuri are măsura egală cu: **A.** 90°; **B.** 100°; **C.** 80°; **D.** 70°.

2. Unește, prin săgeți, fiecare enunț aflat în coloana din stânga cu răspunsul corespunzător aflat în coloana din dreapta. **4,5 puncte**

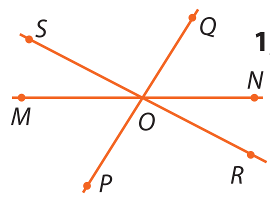
Observă figura alăturată, în care unghiurile *AOB*, *COD* și *EOF* sunt unghiuri alungite. Dacă măsura unghiului *AOC* este egală cu o treime din măsura unghiului *BOE*, atunci:



a) $\sphericalangle BOD = ...$	**1)** 100°;
b) $\sphericalangle AOD = ...$	**2)** 60°;
c) $\sphericalangle AOF = ...$	**3)** 20°;
	4) 160°.

3. Completează caseta cu răspunsul corect. **1,5 puncte**

În figura alăturată, dreptele *MN*, *PQ* și *RS* sunt concurente în punctul *O*. Perechile de unghiuri congruente sunt: $\boxed{}$.



Din oficiu: 1 punct

V.1.2. Unghiuri formate în jurul unui punct. Suma măsurilor lor

Rezolvăm împreună

Observă cele patru unghiuri din figura 1: *AOB*, *BOC*, *COD* și *DOA*.

a) Numește vârful fiecărui unghi.

b) Cercetează dacă printre cele patru unghiuri există două ale căror interioare au puncte comune.

c) Calculează suma măsurilor celor patru unghiuri.

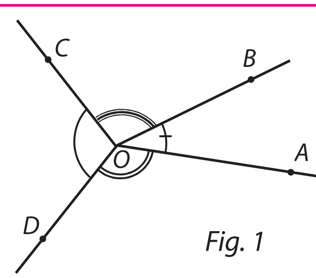


Fig. 1

Rezolvare:

a) Vârful fiecărui unghi este punctul *O*. Altfel spus, *cele patru unghiuri au vârful comun.*

b) Printre cele patru unghiuri nu există două ale căror interioare să aibă puncte comune. Altfel spus, *oricare două dintre cele patru unghiuri au interioarele disjuncte.*

c) Notăm cu *x*, *y*, *z* și *t* măsurile exprimate în grade ale unghiurilor *AOB*, *BOC*, *COD* și, respectiv, *DOA*. Completăm apoi figura 1 cu semidreapta *OE*, opusă semidreptei *OA* (figura 2). Deoarece unghiul *AOE* este alungit, rezultă că: $\begin{cases} x+y+\sphericalangle EOC=180° \\ t+\sphericalangle EOD=180° \end{cases}$. Adunând cele două egalități, rezultă că $x+y+t+\sphericalangle EOC+\sphericalangle EOD=180°+180°=360°$.

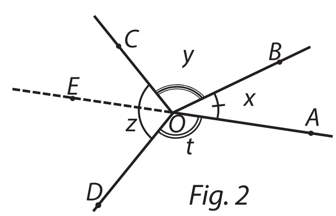


Fig. 2

Deoarece $\sphericalangle EOC+\sphericalangle EOD=\sphericalangle COD=z$, rezultă că $x+y+t+z=360°$, adică *suma măsurilor celor patru unghiuri este egală cu* 360°.

Observăm și descoperim cunoștințe noi

Cele patru unghiuri *AOB*, *BOC*, *COD*, *DOA* din figura 2 au vârful comun (punctul *O*), iar interioarele lor sunt disjuncte (nu au puncte comune). Din demonstrație a rezultat că suma măsurilor celor patru unghiuri este egală cu 360°.

Reține!

- **Unghiuri în jurul unui punct** înseamnă un număr finit de unghiuri proprii, cu următoarele proprietăți:
  - au vârful comun;
  - oricare două dintre ele au interioarele disjuncte;
  - suma măsurilor lor este egală cu 360°.

Aplicăm cunoștințele

Observă figura 3, unde *OD* și *OE* sunt semidreptele opuse semidreptelor *OB*, respectiv *OC*.

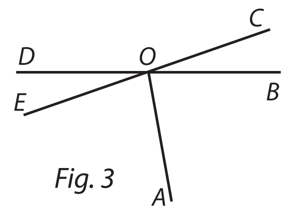


Fig. 3

a) Determină numărul unghiurilor proprii din figură care au vârful comun în punctul *O*.
b) Arată că oricare două unghiuri proprii cu vârful în punctul *O* nu pot fi unghiuri în jurul punctului *O*.
c) Numește trei unghiuri cu vârful în punctul *O*, care sunt unghiuri în jurul punctului *O*.
d) Numește patru unghiuri cu vârful în punctul *O*, care sunt unghiuri în jurul punctului *O*.
e) Demonstrează că suma măsurilor unghiurilor *AOB*, *BOC*, *COD*, *DOE*, *EOA* este egală cu 360° și că aceste unghiuri sunt unghiuri în jurul punctului *O*.

Rezolvare:

a) Numărul unghiurilor din figură, care au vârful comun în punctul *O*, este egal cu 10, dintre care două unghiuri sunt improprii (*BOD* și *COE* sunt unghiuri alungite) și opt sunt unghiuri proprii.
b) Notăm cu *x* și cu *y* măsurile în grade a două unghiuri oarecare cu vârful în punctul *O*. Cele două unghiuri sunt unghiuri proprii. Rezultă că $x < 180°$ și $y < 180°$, de unde $x + y < 360°$. Deoarece suma măsurilor celor două unghiuri nu este egală cu 360°, cele două unghiuri proprii cu vârful în punctul *O* nu sunt unghiuri în jurul punctului *O*.
c) Unghiurile *AOC*, *COD* și *DOA* sunt unghiuri în jurul punctului *O* deoarece: au vârful comun, oricare două dintre unghiuri au interioarele disjuncte și suma măsurilor celor trei unghiuri este egală cu 360°.
d) Unghiurile *AOC*, *COD*, *DOE* și *EOA* sunt patru unghiuri în jurul punctului *O*. Justifică!
e) Unghiul *BOD* este unghi alungit și $\begin{cases} \sphericalangle BOC + \sphericalangle COD = \sphericalangle BOD \\ \sphericalangle AOB + \sphericalangle EOA + \sphericalangle DOE = \sphericalangle BOD \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \sphericalangle BOC + \sphericalangle COD = 180° \\ \sphericalangle AOB + \sphericalangle EOA + \sphericalangle DOE = 180° \end{cases}.$

Adunând ultimele două egalități, rezultă că suma măsurilor unghiurilor *AOB*, *BOC*, *COD*, *DOE* și *EOA* este egală cu 360°. Aceste cinci unghiuri sunt unghiuri în jurul punctului *O* deoarece: au vârful comun, oricare două dintre unghiuri au interioarele disjuncte și suma măsurilor lor este egală cu 360°.

Exersează, fixează și aprofundează cunoștințele

1. Observă figura 4, care pune în evidență cinci unghiuri, numerotate de la 1 la 5. Măsurile lor sunt, în ordine: 40°, 90°, 110°, 120°, 20°. Completează spațiul punctat cu răspunsul corect.

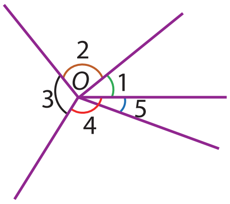


Fig. 4

a) Unghiurile care au același vârf sunt ... .
b) Unghiurile care au interioarele disjuncte două câte două sunt ... .
c) Unghiurile în jurul punctului *O* sunt ... .
d) Suma măsurilor celor cinci unghiuri este egală cu ... .

2. În jurul unui punct O sunt cinci unghiuri congruente: $\sphericalangle AOB$, $\sphericalangle BOC$, $\sphericalangle COD$, $\sphericalangle DOE$ și EOA.

a) Calculează măsurile unghiurilor AOB, AOC, AOD, AOE, BOD, BOE și COE.

b) Realizează un desen care să ilustreze datele problemei.

3. În figura 5, $\sphericalangle AOB = 130°$ și $\sphericalangle AOC = 80°$.

a) Calculează măsura unghiului BOC.

b) Dacă OD este semidreapta opusă semidreptei OA, calculează măsura unghiului COD.

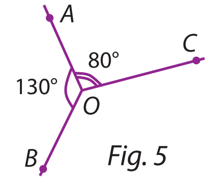


Fig. 5

4. Se consideră dreptele AB și CD concurente în punctul O.

a) Scrie unghiurile formate în jurul punctului O și perechile de unghiuri opuse la vârf formate.

b) Știind că $\sphericalangle BOD = 47°$, calculează măsurile celorlalte unghiuri.

5. Calculează măsurile unghiurilor formate de două drepte concurente, știind că diferența măsurilor a două dintre ele este egală cu 70°.

6. În jurul unui punct O se consideră cinci unghiuri care nu au puncte interioare comune, cu măsurile: $x°$, $x° + 15°$, $2x° - 30°$, $2x° + 10°$, $3x° - 40°$. Calculează măsurile celor cinci unghiuri.

7. Se consideră un unghi alungit AOB, semidreapta OC, astfel încât $\sphericalangle AOC = 4 \cdot \sphericalangle BOC$ și un punct D, astfel încât punctele C și D să fie situate de o parte și de alta a dreptei AB, iar $\sphericalangle AOD = 3 \cdot \sphericalangle BOC$.

a) Calculează măsurile unghiurilor AOC, BOC, AOD.

b) Analizează dacă unghiurile AOC, AOD, BOC și AOB sunt unghiuri în jurul punctului O.

8. Se notează cu O punctul de intersecție a două drepte concurente a și b. Se obțin patru unghiuri proprii, cu vârful în punctul O.

a) Demonstrează că cele patru unghiuri sunt unghiuri în jurul punctului O.

b) Dacă suma măsurilor a trei unghiuri este egală cu $312°45'$, calculează măsura fiecărui unghi.

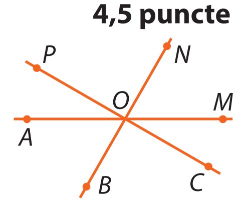
9. Două unghiuri proprii AOB și BOC au interioarele disjuncte și măsurile $a°$, respectiv $b°$. Știind că $a° + b° > 180°$, demonstrează că unghiurile AOB, BOC și COA sunt unghiuri în jurul punctului O.

AUTOEVALUARE

10 min

1. Dacă apreciezi că afirmația este adevărată, încercuiește litera A. În caz contrar, încercuiește litera F. **4,5 puncte**

În figura alăturată, dreptele AM, BN și CP sunt concurente în punctul O.



a) Unghiurile AOB, BOC, COM, MON și NOP sunt unghiuri în jurul punctului O. **A F**

b) Unghiurile AOC, CON și AON sunt unghiuri în jurul punctului O. **A F**

c) $\sphericalangle MOP + \sphericalangle POA + \sphericalangle BOM = 360°$. **A F**

2. Încercuiește litera corespunzătoare răspunsului corect. **3 puncte**

Două unghiuri proprii MON și NOP au interioarele disjuncte. Notăm cu x și y măsurile unghiurilor MON și NOP, exprimate în grade.

a) Unghiurile MON, NOP și POM sunt unghiuri în jurul punctului O, dacă:

A. $x + y = 360°$; **B.** $x + y = 180°$; **C.** $x + y < 180°$; **D.** $x + y > 180°$.

b) Dacă $x + y = 220°$, atunci măsura unghiului POM este egală cu:

A. 40°; **B.** 140°; **C.** 110°; **D.** 80°.

3. Completează caseta cu răspunsul corect. **1,5 puncte**

Se consideră cinci unghiuri în jurul unui punct. Dacă măsurile acestor unghiuri sunt exprimate prin cinci numere naturale consecutive, atunci cel mai mic dintre ele are măsura egală cu ☐.

Din oficiu: 1 punct

V.1.3. Unghiuri suplementare. Unghiuri complementare

Rezolvăm, observăm și descoperim cunoștințe noi

Se consideră trei semidrepte distincte *OA*, *OB* și *OC*, astfel încât punctele *A*, *O*, *B* să fie coliniare. Calculează suma măsurilor unghiurilor *AOC* și *BOC*.

Rezolvare:

Desenăm punctele coliniare *A*, *O*, *B* și apoi desenăm semidreapta *OC* (figura 1). Observăm că $\sphericalangle AOC + \sphericalangle COB = \sphericalangle AOB$ (1). Din faptul că punctele *A*, *O*, *B* sunt coliniare, rezultă că unghiul *AOB* este unghi alungit, adică $\sphericalangle AOB = 180°$. Din (1) rezultă că $\sphericalangle AOC + \sphericalangle COB = 180°$.

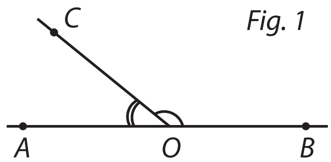


Fig. 1

Observație: Deoarece suma măsurilor unghiurilor *AOC* și *COB* este 180°, spunem că *AOC* și *COB* sunt unghiuri suplementare și fiecare dintre ele este suplement al celuilalt (unghiul *AOC* este suplementul unghiului *COB* și unghiul *COB* este suplementul unghiului *AOC*).

Reține!

- Două unghiuri se numesc **unghiuri suplementare** dacă suma măsurilor lor este egală cu 180°. Fiecare dintre cele două unghiuri este **suplementul** celuilalt unghi.
- Dacă două unghiuri suplementare sunt congruente, atunci fiecare este un unghi drept.
- Unghiurile care au același suplement sunt congruente.
- Unghiurile congruente au suplemente congruente.
- Suplementul unghiului cu măsura de $x°$ este unghiul cu măsura de $180° - x°$.

Aplicăm cunoștințele

Două unghiuri suplementare au măsurile, exprimate în grade, egale cu *x* și *y*. Dacă $3 \cdot x = 2 \cdot y$, calculează măsurile celor două unghiuri.

Rezolvare: Din enunțul problemei rezultă că $3 \cdot x = 2 \cdot y = k$, adică $x = \frac{k}{3}$ și $y = \frac{k}{2}$ (1). Cum unghiurile sunt suplementare, rezultă că suma măsurilor lor este egală cu 180°, adică $\frac{k}{3} + \frac{k}{2} = 180°$. Aducând la același numitor obținem $\frac{2k+3k}{6} = 180°$, adică $5k = 1080°$, de unde $k = 216°$. Din (1) obținem: $x = 216° : 3 = 72°$ și $y = 216° : 2 = 108°$.

Rezolvăm, observăm și descoperim cunoștințe noi

Se consideră un unghi drept *AOB* și un punct *C* interior lui. Calculează suma măsurilor unghiurilor *AOC* și *COB*.

Rezolvare: Folosind echerul, desenăm un unghi drept *AOB* și luăm un punct *C* în interiorul lui. Desenăm apoi semidreapta *OC* (figura 2). Observăm că $\sphericalangle AOC + \sphericalangle COB = \sphericalangle AOB$ (1). Din faptul că *AOB* este unghi drept rezultă că $\sphericalangle AOB = 90°$ și din (1) obținem: $\sphericalangle AOC + \sphericalangle COB = 90°$.

Observație: Deoarece suma măsurilor unghiurilor *AOC* și *COB* este 90°, spunem că *AOC* și *COB* sunt unghiuri complementare și fiecare dintre ele este complement al celuilalt (unghiul *AOC* este complementul unghiului *COB* și unghiul *COB* este complementul unghiului *AOC*).

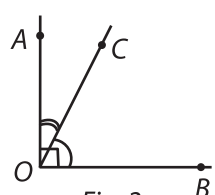


Fig. 2

Reține!

- Două unghiuri se numesc **unghiuri complementare** dacă suma măsurilor lor este egală cu 90°. Fiecare dintre cele două unghiuri este **complementul** celuilalt unghi.
- Dacă două unghiuri complementare sunt congruente, atunci fiecare are măsura egală cu 45°.
- Unghiurile care au același complement sunt congruente.
- Unghiurile congruente au complemente congruente.
- Complementul unghiului cu măsura de $x°$ este unghiul cu măsura de $90° - x°$.

Aplicăm cunoștințele

Două unghiuri complementare au măsurile, exprimate în grade, egale cu x și y. Dacă $x \cdot 2 = y \cdot 3$, calculează măsurile celor două unghiuri.

Rezolvare: Din enunțul problemei avem $x \cdot 2 = y \cdot 3 = k$. Din $x \cdot 2 = k$ rezultă că $x = \frac{k}{2}$ (1) și din $y \cdot 3 = k$ rezultă că $y = \frac{k}{3}$ (2). Cum unghiurile sunt complementare, rezultă că $x + y = 90°$, adică $\frac{k}{2} + \frac{k}{3} = 90°$. Aducem la același numitor și obținem $\frac{3k+2k}{6} = 90°$, adică $5k = 540°$ și $k = 108°$. Din (1) obținem $x = \frac{108°}{2} = 54°$, iar din (2) obținem $y = \frac{108°}{3} = 36°$.

Exersează, fixează și aprofundează cunoștințele

1. Calculează măsurile suplementelor unghiurilor cu măsura egală cu: **a)** 74°; **b)** 19°31′.

2. Calculează măsurile complementelor unghiurilor cu măsura egală cu: **a)** 52°; **b)** 25°40′.

3. Se consideră un unghi cu măsura de 23°15′. Calculează suma măsurilor suplementului și complementului acestui unghi.

4. **a)** Calculează suplementul complementului unghiului cu măsura de 67°.
b) Calculează complementul suplementului unghiului cu măsura de 110°.

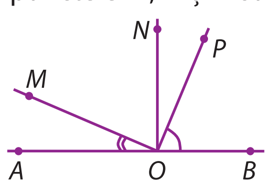
5. **Activitate în perechi.** Desenați cu ajutorul raportorului un unghi *AOB* cu măsura de 70°.
a) Calculați complementul și suplementul acestui unghi.
b) Calculați diferența dintre suplementul și complementul acestui unghi. Ce observați? Este valabilă observația pentru orice unghi? Justificați.

6. **a)** Desenează cu ajutorul raportorului un unghi *AOB* cu măsura de 60°.
b) Desenează, folosind rigla și echerul, suplementul și complementul unghiului *AOB*. Notează-le corespunzător și justifică construcția făcută.

7. Un unghi are măsura de patru ori mai mare decât măsura complementului său. Determină:
a) măsura unghiului; **b)** măsura suplementului acestui unghi.

8. Un unghi are măsura de cinci ori mai mică decât măsura suplementului său. Calculează:
a) măsura unghiului; **b)** măsura complementului acestui unghi.

9. În figura de mai jos, semidreptele *OA* și *OB* sunt semidrepte opuse, iar punctele *M*, *N* și *P* sunt situate de aceeași parte a dreptei *AB*, astfel încât unghiurile *AOM* și *BOP* sunt complementare. Stabilește valoarea de adevăr a propozițiilor:
a) Unghiurile *MON* și *NOP* sunt congruente.
b) Unghiurile *MON* și *NOP* sunt complementare.
c) Unghiurile *MON* și *NOP* sunt suplementare.



AUTOEVALUARE

1. Dacă apreciezi că afirmația este adevărată, încercuiește litera A. În caz contrar, încercuiește litera F. **3 puncte**

a) Dacă două unghiuri sunt complementare, atunci ele sunt congruente. A F

b) Dacă două unghiuri au același complement, atunci ele sunt congruente. A F

c) Două unghiuri suplementare au suma măsurilor egală cu 180°. A F

2. Unește, prin săgeți, fiecare enunț aflat în coloana din stânga cu răspunsul corespunzător aflat în coloana din dreapta. **4,5 puncte**

Observă figura de mai jos, în care semidreapta *OB* este interioară unghiului *AOC*. Dacă $\sphericalangle AOB = 70°$ și $\sphericalangle AOC = 110°$, atunci:

a) măsura complementului unghiului *AOB* este egală cu ...

b) măsura suplementului unghiului *AOC* este egală cu ...

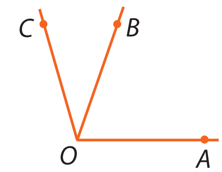
c) măsura complementului unghiului *BOC* este egală cu ...

1) 70°;

2) 140°;

3) 20°;

4) 50°.



3. Completează caseta cu răspunsul corect. **1,5 puncte**

Dacă două unghiuri complementare sunt congruente, atunci fiecare are măsura egală cu $\boxed{}$.

Din oficiu: 1 punct

V.1.4. UNGHIURI ADIACENTE

Ne amintim

Două mulțimi *A* și *B* se numesc disjuncte dacă nu au elemente comune, adică intersecția lor este mulțimea vidă ($A \cap B = \varnothing$).

Rezolvăm, observăm și descoperim cunoștințe noi

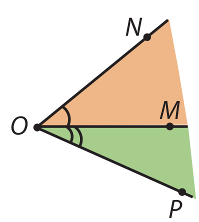
1. a) Desenează o semidreaptă *OM*. De o parte și de alta a semidreptei *OM* desenează semidreptele *ON* și *OP*.

b) Colorează interiorul unghiului *MON* cu o culoare și interiorul unghiului *MOP* cu altă culoare.

Rezolvare:

a) Desenăm semidreapta *OM* și de o parte și de alta a semidreptei *OM*, desenăm semidreptele *ON* și *OP*.

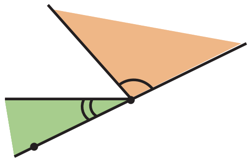
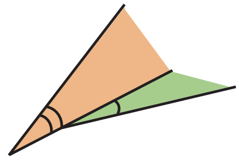
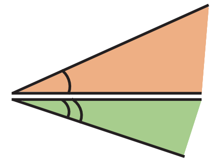
b) Colorăm interioarele unghiurilor *MON* și *MOP* în culori diferite (figura alăturată).



Observații:

- Unghiurile *MON* și *MOP* nu au puncte interioare comune și au:
  - vârful comun, punctul *O*;
  - o latură comună, latura *OM*;
  - laturile *ON* și *OP*, situate de o parte și de alta a laturii comune.
- Spunem despre unghiurile *MON* și *MOP* că sunt unghiuri adiacente.
- În figura anterioară $\sphericalangle MON$ și $\sphericalangle PON$ nu sunt unghiuri adiacente, deoarece interioarele lor nu sunt disjuncte (au puncte interioare comune). Același lucru îl putem spune și despre $\sphericalangle MOP$ și $\sphericalangle NOP$. Ele au puncte interioare comune și ca urmare interioarele lor nu sunt disjuncte. Deci, $\sphericalangle MOP$ și $\sphericalangle NOP$ nu sunt adiacente.

2. Analizează cu atenție perechile de unghiuri din figurile următoare și precizează dacă sunt sau nu sunt adiacente. Justifică afirmațiile făcute.

a)  **b)**  **c)** 

***Rezolvare*:**
La punctul a) unghiurile nu sunt adiacente, deoarece nu au o latură comună.
La punctul b) unghiurile nu sunt adiacente, deoarece nu au vârf comun și nu au nici latură comună.
La punctul c) unghiurile nu sunt adiacente, deoarece nu au vârf comun și nu au nici latură comună.

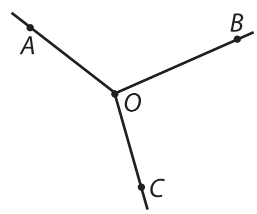
Reține!

- Două unghiuri se numesc **unghiuri adiacente** dacă **au vârful comun, o latură comună și celelalte două laturi situate de o parte și de alta a laturii comune**.
- Dacă suma măsurilor a două unghiuri adiacente este egală cu 180°, atunci cele două unghiuri se numesc **unghiuri adiacente suplementare**.
- Dacă suma măsurilor a două unghiuri adiacente este egală cu 90°, atunci cele două unghiuri se numesc **unghiuri adiacente complementare**.
- Unghiurile improprii, adică unghiul nul și unghiul alungit, nu pot fi adiacente cu niciun alt unghi.

Observație: Condiția „celelalte două laturi situate de o parte și de alta a laturii comune" poate fi înlocuită cu „nu au puncte interioare comune" sau cu „au interioarele disjuncte".

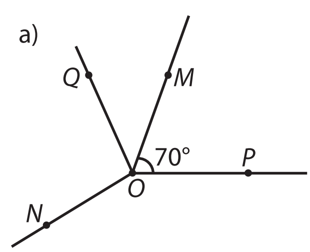
Aplicăm cunoștințele

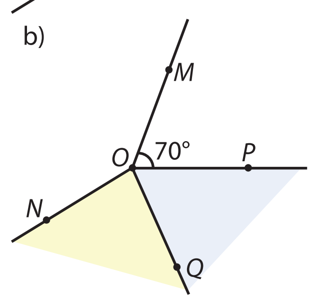
1. Dacă trei unghiuri *AOB*, *BOC* și *COA* sunt adiacente două câte două, demonstrează că cele trei unghiuri sunt unghiuri în jurul unui punct.



Rezolvare:
Cele trei unghiuri *AOB*, *BOC* și *COA* sunt adiacente două câte două și, ca urmare, au același vârf, au interioarele disjuncte și suma măsurilor lor este $\sphericalangle AOB + \sphericalangle BOC + \sphericalangle COA = 360°$. Deci, sunt unghiuri în jurul punctului *O* (figura alăturată).

2. Se consideră două unghiuri adiacente *MON* și *NOP* cu suma măsurilor egală cu 290° și un punct *Q*, astfel încât măsura unghiului *POQ* să fie mai mare de 70°. Analizează dacă unghiul *POQ* poate fi adiacent cu unul dintre unghiurile *MON* sau *NOP*.





Rezolvare:
Dacă unghiurile *MON* și *NOP* sunt adiacente și $\sphericalangle MON + \sphericalangle NOP = 290°$, atunci $\sphericalangle MOP = 360° - (\sphericalangle MON + \sphericalangle NOP) = 360° - 290° = 70°$. Dacă $\sphericalangle POQ > 70°$, atunci avem una din situațiile:
i) Punctul *Q* este interior unghiului *MON* (figura a)). Ca urmare, $\sphericalangle MON$ și $\sphericalangle POQ$ nu au interioarele disjuncte și nici o latură comună, deci nu sunt adiacente, însă $\sphericalangle POQ$ este adiacent cu $\sphericalangle NOP$ (au latura *OP* comună, vârful comun și interioarele disjuncte).
ii) Punctul *Q* este interior unghiului *NOP*. Ca urmare, $\sphericalangle POQ$ și $\sphericalangle PON$ nu sunt adiacente pentru că nu au interioarele disjuncte, iar $\sphericalangle POQ$ și $\sphericalangle MON$ nu sunt adiacente pentru că nu au latură comună.

Exersează, fixează și aprofundează cunoștințele

1. Completează spațiul punctat cu răspunsul corect.

a) Două unghiuri se numesc adiacente dacă ... .

b) Două unghiuri se numesc adiacente complementare dacă ... .

c) Două unghiuri se numesc adiacente suplementare dacă ... .

2. În figura 1, punctele A, O, B sunt coliniare și unghiul AOE este unghi drept.

a) Scrie unghiurile adiacente din figură.

b) Scrie unghiurile adiacente complementare din figură.

c) Scrie unghiurile adiacente suplementare din figură.

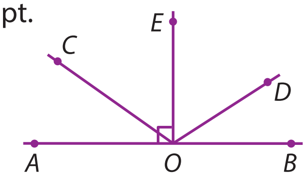


Fig. 1

3. a) Desenează două unghiuri adiacente complementare.

b) Desenează două unghiuri adiacente suplementare.

4. Construiește un unghi MON și semidreapta OP, astfel încât unghiurile următoare să fie adiacente:

a) $\sphericalangle MOP$ și $\sphericalangle NOP$; **b)** $\sphericalangle MOP$ și $\sphericalangle MON$; **c)** $\sphericalangle MON$ și $\sphericalangle NOP$.

5. Activitate în perechi

Se dau unghiurile adiacente MOP și PON. Precizați dacă punctele M, O, N sunt coliniare, știind că:

a) $\sphericalangle MOP = 45°$ și $\sphericalangle PON = 135°$; **b)** $\sphericalangle MOP = 37°11'$ și $\sphericalangle PON = 142°49'$.

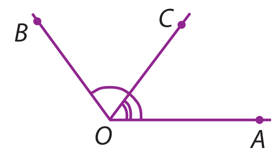


Fig. 2

6. În figura 2, unghiurile AOC și BOC sunt adiacente. Calculează măsura unghiului BOC, știind că $\sphericalangle AOC = 54°47'$ și $\sphericalangle AOB = 125°$.

7. Măsura unghiului format de laturile necomune a două unghiuri adiacente este egală cu 140°. Determină măsurile celor două unghiuri, știind că măsura unuia dintre ele este o pătrime din măsura celuilalt.

8. Două unghiuri adiacente AOB și BOC au suma măsurilor egală cu 300°. Se consideră un punct D, astfel încât $\sphericalangle COD > 60°$. Analizează dacă $\sphericalangle COD$ poate fi adiacent cu unul dintre unghiurile AOB sau BOC.

AUTOEVALUARE

10 min

1. Dacă apreciezi că afirmația este adevărată, încercuiește litera A. În caz contrar, încercuiește litera F. **3 puncte**

a) Dacă două unghiuri sunt complementare, atunci ele sunt adiacente. **A F**

b) Dacă trei unghiuri sunt unghiuri în jurul unui punct, atunci ele sunt adiacente două câte două. **A F**

c) Două unghiuri suplementare pot fi adiacente sau neadiacente. **A F**

2. Unește, prin săgeți, fiecare enunț aflat în coloana din stânga cu răspunsul corespunzător aflat în coloana din dreapta. **4,5 puncte**

În figura alăturată, OA și OB sunt semidrepte opuse, iar punctele M și N sunt de aceeași parte a dreptei AB. Dacă $\sphericalangle AOM = 27°$ și $\sphericalangle AON = 63°$, atunci:

a) AOM și AON sunt unghiuri ...

b) AON și BON sunt unghiuri ...

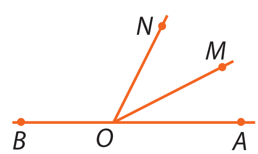
c) AOM și NOM sunt unghiuri ...

1) adiacente;

2) complementare și neadiacente;

3) adiacente suplementare;

4) suplementare și neadiacente.



3. Completează spațiul liber cu răspunsul corect. **1,5 puncte**

Două unghiuri sunt adiacente dacă au ... .

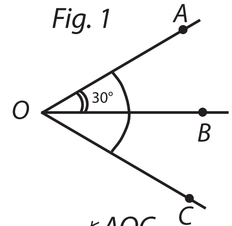
Din oficiu: 1 punct

V.1.5. Bisectoarea unui unghi. Construcția bisectoarei unui unghi

Rezolvăm, observăm și descoperim cunoștințe noi

Desenează două unghiuri adiacente, notate *AOB* și *BOC*, astfel încât $\sphericalangle AOB = 30°$ și $\sphericalangle AOC = 60°$. Calculează măsura unghiului *BOC*. Ce observi? Justifică!

Fig. 1



Rezolvare:

Desenăm unghiul *AOB* cu măsura de 30° și unghiul *AOC* cu măsura de 60°, astfel încât semidreptele *OA* și *OC* să fie de o parte și de alta a semidreptei *OB* (figura 1). Astfel, unghiurile *AOB* și *BOC* sunt adiacente. Cum $\sphericalangle AOC = \sphericalangle AOB + \sphericalangle BOC$, rezultă că $60° = 30° + \sphericalangle BOC$, de unde $\sphericalangle BOC = 30°$.

Observăm că unghiurile *AOB* și *BOC* sunt adiacente și congruente și $\sphericalangle BOC = \sphericalangle AOB = \dfrac{\sphericalangle AOC}{2}$. Mai observăm că semidreapta *OB* este interioară unghiului *AOC*, are originea în vârful unghiului *AOC* și formează cu laturile unghiului *AOC* două unghiuri congruente.

Spunem despre semidreapta *OB* că este *bisectoarea* unghiului *AOC*.

Construcția bisectoarei unui unghi cu rigla și raportorul

Se consideră un unghi *MON* (figura 2.a).

- Măsurăm unghiul cu raportorul ($\sphericalangle MON = 80°$).
- Calculăm jumătate din măsura unghiului ($80° : 2 = 40°$).
- Așezăm raportorul ca în figura 2.b și marcăm punctul din dreptul măsurii înjumătățite (40°), notându-l cu *A*.
- Cu ajutorul riglei, trasăm semidreapta *OA* cu originea în vârful unghiului și care trece prin punctul *A* (figura 2.c).
- Am obținut: → unghiurile *MOA* și *NOA* sunt adiacente și congruente;
→ semidreapta *OA* este bisectoarea unghiului *MON*.

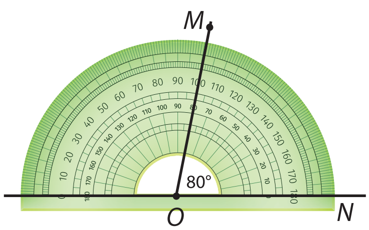


Fig. 2.a

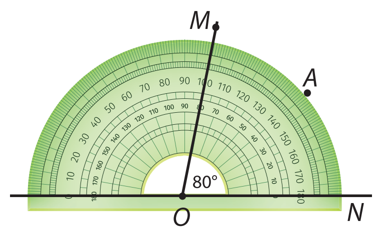


Fig. 2.b

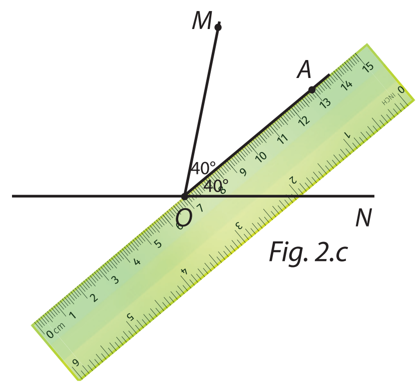
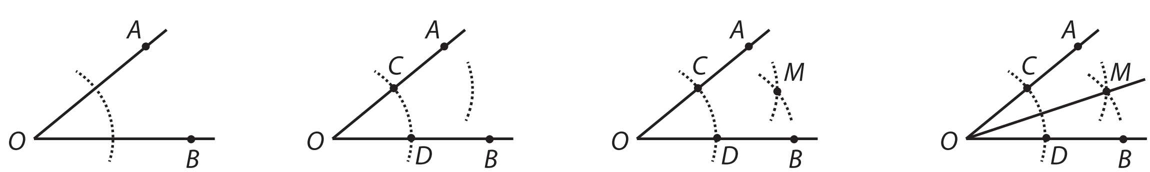


Fig. 2.c

Construcția bisectoarei unui unghi cu rigla și compasul

Se consideră un unghi *AOB*.

- Cu vârful compasului în punctul *O*, trasăm un arc de cerc care intersectează laturile unghiului în punctele *C* și *D*.
- Cu aceeași deschidere a compasului, punând vârful acestuia în punctul *C*, apoi în punctul *D*, trasăm două arce de cerc în interiorul unghiului, care se intersectează într-un punct pe care îl notăm cu *M*.
- Unind punctul *O* cu punctul *M* obținem semidreapta *OM*, care este bisectoarea unghiului *AOB*.



Reține!

- **Bisectoarea** unui unghi este semidreapta interioară unghiului, cu originea în vârful unghiului, care formează cu laturile acestuia două unghiuri congruente.
- Bisectoarea oricărui unghi formează cu laturile unghiului două unghiuri adiacente.
- Bisectoarea oricărui unghi este axa de simetrie a unghiului respectiv.
- Orice unghi propriu are o singură bisectoare.
- Dacă un unghi este drept, atunci cele două unghiuri formate de bisectoarea sa sunt adiacente, complementare și congruente, iar fiecare dintre acestea are măsura egală cu 45°.
- Dacă un unghi este alungit, atunci cele două unghiuri formate de bisectoarea sa sunt adiacente, suplementare și congruente, iar fiecare dintre acestea are măsura egală cu 90°.

Observație: În limbaj obișnuit, mai puțin riguros, se spune că *bisectoarea unui unghi* ***împarte*** *unghiul în două unghiuri adiacente congruente.*

Aplicăm cunoștințele

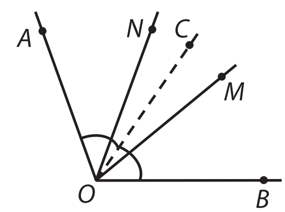
Se consideră un unghi *AOB* cu măsura de 110°. În interiorul unghiului se consideră semidreptele *OM* și *ON*, astfel încât $\sphericalangle AOM = \sphericalangle BON = 70°$.

a) Calculează măsurile unghiurilor *BOM*, *AON* și *NOM*.

b) Știind că semidreapta *OC* este bisectoarea unghiului *AOB*, arată că semidreapta *OC* este și bisectoarea unghiului *NOM*.

Rezolvare:

Realizăm un desen care să ilustreze datele problemei.



a) Din $\sphericalangle AOB = 110°$ și $\sphericalangle AOM = 70°$ rezultă că $\sphericalangle BOM = \sphericalangle AOB - \sphericalangle AOM$, adică $\sphericalangle BOM = 110° - 70° = 40°$. Din $\sphericalangle AOB = 110°$ și $\sphericalangle BON = 70°$ rezultă că $\sphericalangle AON = \sphericalangle AOB - \sphericalangle BON = 110° - 70° = 40°$. Cum $\sphericalangle AON + \sphericalangle NOM + \sphericalangle MOB = \sphericalangle AOB$, avem $40° + \sphericalangle NOM + 40° = 110°$, adică $\sphericalangle NOM = 110° - 80° = 30°$.

b) Construind *OC* bisectoarea unghiului *AOB*, obținem $\sphericalangle AOC = \sphericalangle BOC = 110° : 2 = 55°$. Cum $\sphericalangle AON + \sphericalangle NOC = \sphericalangle AOC$, rezultă că $40° + \sphericalangle NOC = 55°$, adică $\sphericalangle NOC = 15°$ (1). Cum $\sphericalangle BOM + \sphericalangle MOC = \sphericalangle BOC$, rezultă că $40° + \sphericalangle MOC = 55°$, adică $\sphericalangle MOC = 15°$ (2). Din (1) și (2) rezultă că $\sphericalangle NOC = \sphericalangle MOC = 15°$, adică semidreapta *OC* este bisectoarea unghiului *NOM*.

Observație: Asemănător se poate arăta că *dacă OC este bisectoarea unghiului NOM, atunci OC este și bisectoarea unghiului AOB.*

Exersează, fixează și aprofundează cunoștințele

1. Desenează, folosind rigla și raportorul, un unghi *AOB* cu măsura de 80°. În interiorul unghiului reprezintă un punct *M*, astfel încât $\sphericalangle AOM = 40°$. Demonstrează că semidreapta *OM* este bisectoarea unghiului *AOB*.

2. Desenează, folosind echerul, unghiul drept *AOB*. Notează cu *OB′* semidreapta opusă semidreptei *OB*. Demonstrează că semidreapta *OA* este bisectoarea unghiului *BOB′*.

3. Se consideră unghiul *AOB* și se notează cu *OM* bisectoarea sa.

a) Calculează măsurile unghiurilor *AOM* și *BOM*, știind că $\sphericalangle AOB = 120°48'$.

b) Calculează măsura unghiului *AOB*, știind că $\sphericalangle AOM = 29°37'$.

4. În figura 1, unghiul *AOB* este unghi drept, iar $\sphericalangle BOC = 30°$.

a) Desenează în caietul tău figura.

b) Notează cu *OM* și *ON* bisectoarele unghiurilor *AOB*, respectiv *BOC* și calculează măsurile unghiurilor *AOM*, *BON*, *AON* și *MON*.

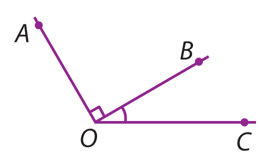


Fig. 1

5. Unghiurile MON și NOP sunt adiacente. Semidreapta ON este bisectoarea unghiului MOP, iar semidreapta OP este bisectoarea unghiului MOQ.

a) Calculează măsurile unghiurilor MOP, MOQ și NOQ, știind că $\sphericalangle MON = 20^\circ$.

b) Calculează măsurile unghiurilor MOP, NOP și NOQ, știind că $\sphericalangle MOQ = 140^\circ$.

6. Se consideră un unghi AOB și OM bisectoarea acestui unghi. Știind că ON este semidreapta opusă semidreptei OM, demonstrează că unghiurile AON și BON sunt congruente. Semidreapta ON este bisectoare? Justifică răspunsul dat.

7. Observă figura 2, în care OA este bisectoarea unghiului MON, iar unghiurile MOP și NOQ sunt congruente.

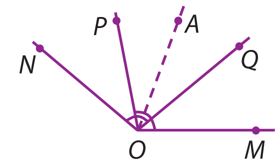


Fig. 2

a) Demonstrează că $\sphericalangle NOP \equiv \sphericalangle MOQ$.

b) Demonstrează că OA este bisectoarea unghiului POQ.

c) Știind că $\sphericalangle MON = 140^\circ$ și $\sphericalangle NOQ = 100^\circ$, calculează măsurile unghiurilor MOQ, NOP, POQ și AOQ.

8. Se consideră un unghi drept AOB și semidreapta OM interioară unghiului AOB, astfel încât $\sphericalangle AOM = 30^\circ$. Se notează cu ON bisectoarea unghiului BOM.

a) Calculează măsura unghiului BON.

b) Demonstrează că OM este bisectoarea unghiului AON.

9. Activitate în perechi. Unghiurile MOP și PON sunt adiacente și x este măsura în grade a unghiului determinat de bisectoarele celor două unghiuri. Calculați măsura unghiului MON, știind că:

a) $x = 27^\circ$; **b)** $x = 72^\circ$.

10. Se consideră un unghi drept AOB. În interiorul unghiului se consideră semidreptele OM și OP, iar în exteriorul unghiului se consideră semidreptele ON și OQ, astfel încât OA să fie bisectoarea unghiului MON, OB să fie bisectoarea unghiului POQ și $\sphericalangle MON \equiv \sphericalangle POQ$.

a) Realizează un desen care să ilustreze datele problemei. Analizează toate cazurile posibile.

b) Demonstrează că $\sphericalangle MOQ \equiv \sphericalangle PON$.

c) Unghiurile MOP, AOB și NOQ au aceeași bisectoare? Justifică răspunsul dat.

AUTOEVALUARE

10 min

1. Încercuiește litera corespunzătoare răspunsului corect. **3 puncte**

a) Se consideră două unghiuri adiacente și complementare. Dacă se notează cu x măsura, exprimată în grade, a unghiului determinat de bisectoarele celor două unghiuri, atunci:

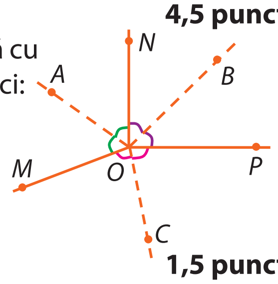
A. $x = 90^\circ$; **B.** $x = 45^\circ$; **C.** $45^\circ < x < 90^\circ$; **D.** $x < 45^\circ$.

b) Se consideră două unghiuri adiacente și suplementare. Dacă se notează cu x măsura, exprimată în grade, a unghiului determinat de bisectoarele celor două unghiuri, atunci:

A. $90^\circ < x < 180^\circ$; **B.** $x = 180^\circ$; **C.** $x < 90^\circ$; **D.** $x = 90^\circ$.

2. Unește, prin săgeți, fiecare enunț aflat în coloana din stânga cu răspunsul corespunzător aflat în coloana din dreapta. **4,5 puncte**

Se consideră unghiurile MON, NOP și POM în jurul punctului O și se notează cu OA, OB și OC bisectoarele acestora. Știind că $\sphericalangle MON = 110^\circ$ și $\sphericalangle NOP = 90^\circ$, atunci:



a) $\sphericalangle BON = ...$	**1)** 55°;
b) $\sphericalangle MOA = ...$	**2)** 100°;
c) $\sphericalangle COM = ...$	**3)** 80°;
	4) 45°.

3. Completează caseta cu răspunsul corect. **1,5 puncte**

Unghiurile AOB și BOC sunt adiacente. Dacă unghiul format de bisectoarele acestor unghiuri are măsura egală cu 75°, atunci măsura unghiului AOC este egală cu $\boxed{}$.

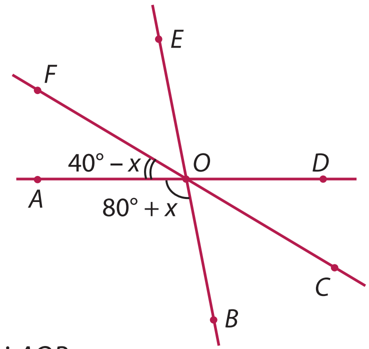
Din oficiu: 1 punct

Exerciții și probleme recapitulative

1. Analizează cu atenție figura alăturată.

a) Calculează măsura unghiului *EOF*.

b) Dacă măsura unghiului *AOF* este o cincime din măsura unghiului *AOB*, calculează măsurile unghiurilor *BOC*, *COD*, *DOE*.



2. Unghiurile *MON*, *NOP*, *POQ* și *QOM* sunt unghiuri în jurul punctului *O*. Semidreptele *OA* și *OB* sunt bisectoarele unghiurilor *MON* și *POQ*.

a) Dacă *OA* și *OB* sunt semidrepte opuse, arată că unghiurile *MOQ* și *NOP* sunt congruente;

b) Dacă $\sphericalangle NOP = 150°$ și $\sphericalangle MOQ = 110°$, calculează măsura unghiului *AOB*.

3. Unghiurile *AOB* și *BOC* sunt unghiuri adiacente. Dacă $\sphericalangle BOC = 7 \cdot \sphericalangle AOB = 84°$, calculează:

a) măsura unghiului format de bisectoarele celor două unghiuri;

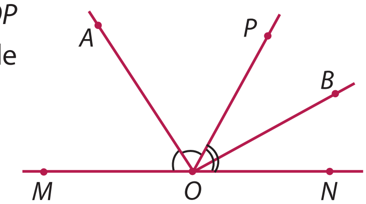
b) măsura suplementului unghiului format de cele două bisectoare.

4. În figura alăturată, punctele *M*, *O*, *N* sunt coliniare și semidreapta *OP* este interioară unghiului *AOB*. Semidreptele *OA* și *OB* sunt bisectoarele unghiurilor *MOP* și *NOP*.

a) Precizează perechile de unghiuri adiacente din figură.

b) Precizează perechile de unghiuri congruente.

c) Demonstrează că unghiul *AOB* este unghi drept.



5. Două unghiuri *M* și *N* sunt complementare și raportul măsurilor lor este egal cu 0,5.

a) Calculează măsurile celor două unghiuri.

b) Dacă suplementele unghiurilor *M* și *N* sunt unghiurile *A* și *B*, calculează măsurile unghiurilor *A* și *B*.

6. Se consideră *n* unghiuri în jurul unui punct *O*. Măsurile acestor unghiuri, exprimate în grade, sunt egale cu: x, $2x$, $3x$, ..., nx, iar cel mai mare dintre unghiuri are măsura egală cu 120°.

a) Calculează câte unghiuri sunt în jurul punctului *O*.

b) Determină măsura celui mai mic dintre unghiuri.

7. Unghiurile *AOB*, *BOC*, *COD* și *DOA* sunt unghiuri în jurul punctului *O*, astfel încât unghiurile *AOB* și *BOC* să fie suplementare, măsura unghiului *COD* este jumătate din măsura unghiului *BOC* și măsura unghiului *AOB* este o pătrime din măsura unghiului *COD*.

a) Calculează măsurile unghiurilor *AOB*, *BOC*, *COD* și *DOA*.

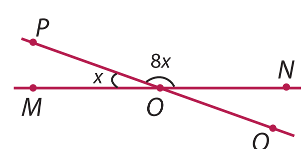
b) Calculează măsurile unghiurilor *EOC* și *EOB*, unde *OE* este semidreapta opusă semidreptei *OD*.

8. În figura alăturată, punctele *M*, *O*, *N* și, respectiv, *P*, *O*, *Q* sunt coliniare.

a) Precizează perechile de semidrepte opuse și perechile de unghiuri opuse la vârf.

b) Calculează măsurile unghiurilor *MOP*, *PON* și *POQ*.

c) Dacă *OR* este bisectoarea unghiului *MOQ*, calculează măsura unghiului *POR*.



9. Unghiurile *AOB* și *BOC* sunt unghiuri adiacente. Semidreptele *OE* și *OF* sunt bisectoarele unghiurilor *AOB*, respectiv *BOC*. Știind că $\sphericalangle EOF = 21°15'$, calculează și exprimă în grade și minute:

a) măsura unghiului *AOC*;

b) măsura complementului și măsura suplementului unghiului *AOC*.

10. Unghiurile *AOB* și *BOC* sunt unghiuri adiacente. Semidreptele *OE* și *OF* sunt bisectoarele unghiurilor *AOB*, respectiv *BOC*. Știind că $\sphericalangle AOB = 120°$ și că unghiul *BOC* este unghi drept, calculează măsura unghiului *EOF*.

11. Diferența dintre măsurile a două unghiuri neadiacente care au vârful comun și o latură comună este egală cu 50°. Calculează măsura unghiului format de bisectoarele celor două unghiuri.

EVALUARE

Timp de lucru: 50 de minute.

Subiectul I. Dacă apreciezi că afirmația este adevărată, completează căsuța alăturată cu litera A. În caz contrar, completează cu litera F.

(5p) **1.** Măsura unghiului format de bisectoarele a două unghiuri adiacente suplementare este egală cu $90°$. ☐

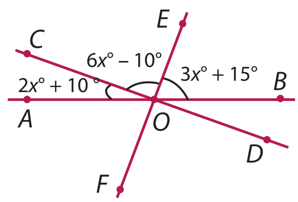
(5p) **2.** Dacă semidreptele OM și ON sunt semidrepte opuse și punctul P este exterior dreptei MN, atunci unghiurile MOP și NOP sunt complementare. ☐

(5p) **3.** Suma măsurilor unghiurilor în jurul unui punct este egală cu $180°$. ☐

(5p) **4.** Dacă dreptele AB și CD sunt concurente în punctul O, atunci unghiurile AOC și AOB sunt adiacente. ☐

Subiectul II. Unește, prin săgeți, fiecare cifră corespunzătoare enunțurilor din coloana **A**, cu litera care indică răspunsul corect aflat în coloana **B**.

În figura alăturată, dreptele AB, CD și EF sunt concurente în punctul O. Dacă măsurile unghiurilor, exprimate în grade, sunt cele din figură, atunci



	A	B
(5p)	**1.** $\sphericalangle AOC = ...$	**a)** $60°$;
(5p)	**2.** $\sphericalangle FOD = ...$	**b)** $100°$;
(5p)	**3.** $\sphericalangle BOE = ...$	**c)** $40°$;
(5p)	**4.** $\sphericalangle DOE = ...$	**d)** $70°$;
		e) $80°$.

Subiectul III. La cerințele următoare alege litera care indică singura variantă corectă.

(5p) **1.** Dacă unghiurile AOB și BOC sunt adiacente și $\sphericalangle AOB + \sphericalangle BOC = 280°$, atunci:

A. $\sphericalangle AOC > 90°$; **B.** $\sphericalangle AOC = 140°$; **C.** $\sphericalangle AOC = 80°$; **D.** $\sphericalangle AOC = 100°$.

(5p) **2.** Dacă suma măsurilor complementelor a două unghiuri este egală cu $80°$, atunci suma măsurilor unghiurilor este egală cu:

A. $280°$; **B.** $100°$; **C.** $90°$; **D.** $180°$.

(5p) **3.** Se consideră unghiurile AOB și BOC, astfel încât $\sphericalangle AOB - \sphericalangle BOC = \sphericalangle AOC$. În acest caz, unghiurile AOB și BOC sunt:

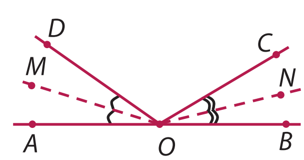
A. adiacente; **B.** neadiacente; **C.** complementare; **D.** suplementare.

(5p) **4.** Dacă unghiurile MON și MOP sunt adiacente, $\sphericalangle MOP = 40°$, $\sphericalangle NOP = 75°$ și măsura complementului unghiului MON, exprimată în grade, este x, atunci:

A. $x = 55°$; **B.** $x = 35°$; **C.** $x = 115°$; **D.** $x = 65°$.

La subiectele IV și V scrie rezolvările complete.

Subiectul IV. În figura alăturată, punctele A, O, B sunt coliniare, punctele C și D sunt situate de aceeași parte față de dreapta AB, iar OM și ON sunt bisectoarele unghiurilor AOD și BOC.



(5p) **a)** Știind că măsura unghiului determinat de cele două bisectoare este egală cu $135°$, calculează măsura unghiului COD.

(5p) **b)** Știind că măsura unghiului BOC este egală cu $30°$ și măsura unghiului COD este egală cu $90°$, calculează măsura unghiului COM.

(5p) **c)** Calculează măsura unghiului COD, știind că unghiurile AOD și BOC sunt complementare.

Subiectul V. Unghiurile AOB, BOC, COD și DOA sunt unghiuri în jurul punctului O, astfel încât: $\sphericalangle AOB = x°$, $\sphericalangle BOC = 2x° - 10°$, $\sphericalangle COD = 3x°$ și $\sphericalangle AOD = 3x° + 10°$.

(5p) **a)** Calculează măsurile unghiurilor AOB, BOC, COD și DOA.

(5p) **b)** Determină măsura unghiului format de bisectoarele unghiurilor AOB și AOD.

(5p) **c)** Calculează complementul și suplementul unghiului BOC.

Se acordă 10 puncte din oficiu. Nota se obține împărțind punctajul final la 10.

Subiectul	I.1	I.2	I.3	I.4	II.1	II.2	II.3	II.4	III.1	III.2	III.3	III.4	IV.a	IV.b	IV.c	V.a	V.b	V.c
Punctajul																		
Nota																		

V.2. PARALELISM

V.2.1. DREPTE PARALELE. AXIOMA PARALELELOR

Observăm și descoperim cunoștințe noi

1. Să analizăm următoarele afirmații:

a) Două unghiuri se numesc complementare dacă suma măsurilor lor este egală cu 90°.

b) Prin două puncte distincte trece o dreaptă și numai una.

c) Dacă două unghiuri sunt opuse la vârf, atunci cele două unghiuri sunt congruente.

Observăm că prin prima afirmație am introdus noțiunea de unghiuri complementare. Astfel de afirmații se numesc *definiții*.

A doua afirmație, învățată în clasa a V-a, evidentă din punct de vedere intuitiv, se numește *axiomă*. Axiomele sunt propoziții matematice care nu trebuie probate, argumentate, justificate.

A treia afirmație ne dă o proprietate a unghiurilor opuse la vârf, învățată în lecțiile anterioare. Pentru a proba, a justifica acest rezultat, am parcurs o succesiune de judecăți și ne-am folosit de definițiile și proprietățile învățate. Astfel de afirmații se numesc *teoreme*. Succesiunea de judecăți folosite pentru a justifica afirmația se numește *demonstrație*.

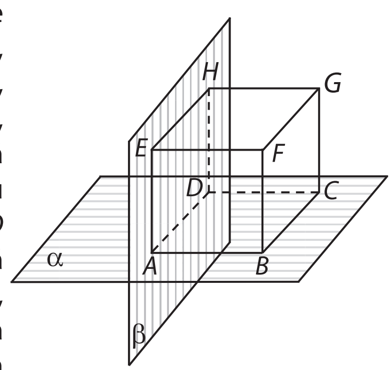
Când vorbim de o teoremă trebuie să precizăm:

- *ipoteza teoremei* (ceea ce se dă) introdusă, în general, prin „dacă”;
- *concluzia teoremei* (ceea ce se cere, ceea ce rezultă din ipoteză) introdusă, în general, prin „atunci”;
- *demonstrația teoremei* ce presupune un șir de judecăți logice prin care, plecând de la ipoteză, folosind definiții și alte rezultate cunoscute, se probează concluzia teoremei.

Reține!

- **Definiția** este o afirmație prin care se introduce o noțiune nouă.
- **Axioma** este o propoziție matematică care oferă o proprietate importantă, evidentă din punct de vedere intuitiv și care nu trebuie demonstrată.
- **Teorema** este o propoziție matematică ce oferă proprietăți importante ale noțiunilor matematice. Teorema presupune trei părți: **ipoteza**, **concluzia** și **demonstrația**.

2. Figura alăturată reprezintă un cub. Fiecare vârf al cubului poate fi identificat cu un *punct*. Am notat vârfurile cubului cu A, B, C, D, E, F, G, H. Fiecare muchie a cubului, imaginată ca prelungită la nesfârșit, poate fi identificată cu o *dreaptă*. Obținem astfel dreptele: AB, BC, CD, AD, AE, BF, CG, DH, EF, FG, GH, EH. Orice față a cubului, gândită ca prelungită la nesfârșit în toate direcțiile, poate fi identificată cu un *plan*. De exemplu, fața cubului pe care se află punctele A, B, C, D poate fi identificată cu planul notat α, iar fața cubului pe care se află punctele A, D, H, E poate fi identificată cu planul notat β. Deci, $A \in \alpha$, $B \in \alpha$, $C \in \alpha$, $D \in \alpha$ și $A \in \beta$, $D \in \beta$, $H \in \beta$, $E \in \beta$. Observăm că dreapta AB *se află* în planul α. Se mai spune că dreapta AB *este conținută* în planul α sau că dreapta AB *este inclusă* în planul α și se notează $AB \subset \alpha$. În acest context putem observa că dreptele AB și AD sunt conținute în planul α și din acest motiv ele se numesc drepte coplanare (se află în același plan) și notăm $AB \subset \alpha$, $AD \subset \alpha$. Dreptele AB și DH sunt situate în plane distincte și, cum nu există niciun plan care să le conțină pe amândouă, ele se numesc *drepte necoplanare* și notăm $AB \subset \alpha$, $DH \subset \beta$ și $\alpha \neq \beta$.



A. Dreptele coplanare *AB* și *AD* ($AB \subset \alpha$, $AD \subset \alpha$) au punctul *A* comun. Se spune că „dreptele *AB* și *AD* *se intersectează* în punctul *A*” sau că „dreptele *AB* și *AD* *sunt concurente* în punctul *A*”.

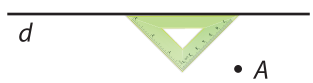
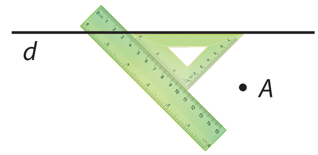
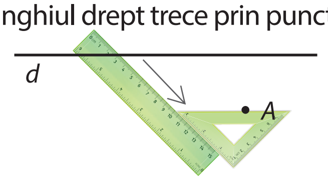
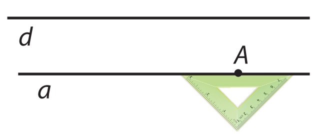
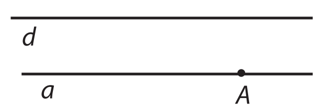
Privind figurile geometrice ca mulțimi de puncte, putem utiliza limbajul și notațiile învățate la mulțimi. Vom scrie $AB \cap AD = \{A\}$.

B. Dreptele coplanare *AB* și *CD* ($AB \subset \alpha$, $CD \subset \alpha$) *nu au niciun punct comun*. Se spune că dreptele *AB* și *CD* sunt paralele și notăm $AB \parallel CD$.

C. Dreptele necoplanare *AB* și *DH* *nu au niciun punct comun*. Deci „dreptele *AB* și *DH* nu se intersectează” sau „intersecția dreptelor *AB* și *DH* este mulțimea vidă” și notăm $AB \cap DH = \varnothing$.

3. Construcția prin translație a două drepte paralele

Pentru a construi o dreaptă *a* paralelă cu o dreaptă *d* și care *să treacă* printr-un punct *A*, exterior dreptei *d*, parcurgem succesiv următoarele etape:

1. Se dă dreapta *d* și punctul *A* exterior dreptei *d* ($A \notin d$). 	2. Așezăm echerul cu muchia care nu conține unghiul drept pe dreapta *d*. 	3. Așezăm o riglă pe una dintre muchiile care conțin vârful unghiului drept. 
4. Ținem rigla fixă și *translatăm* (deplasăm echerul) în jos, sprijinit pe riglă, până când muchia care nu conține unghiul drept trece prin punctul *A*. 	5. Trasăm dreapta suport a muchiei echerului care trece prin punctul *A*. 	6. Faptul că dreptele *a* și *d* sunt paralele ($a \parallel d$) va fi demonstrat într-o viitoare lecție. 

Această construcție ne arată că printr-un punct exterior unei drepte se poate duce o dreaptă paralelă cu dreapta dată. Problema care se pune este dacă mai există încă o dreaptă care să fie paralelă cu dreapta dată și care să conțină punctul dat. Răspunsul la această problemă este dat de matematicianul grec Euclid, printr-o axiomă care îi poartă numele, *axioma lui Euclid*, numită și *axioma paralelelor*, care se enunță astfel: *Printr-un punct exterior unei drepte date se poate duce o singură dreaptă paralelă la acea dreaptă*.

Să observăm că:

• Orice dreaptă este paralelă cu ea însăși și notăm $a \parallel a$. Această proprietate se numește *proprietatea de reflexivitate a relației de paralelism*.

• Dacă o dreaptă *a* este paralelă cu o dreaptă *b*, atunci putem spune că și dreapta *b* este paralelă cu dreapta *a*. Notăm „dacă $a \parallel b$, atunci $b \parallel a$”. Această proprietate se numește *proprietatea de simetrie a relației de paralelism*.

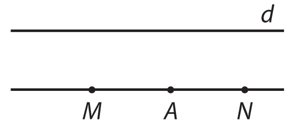
• Două drepte paralele cu o a treia dreaptă sunt paralele între ele. Notăm „dacă $a \parallel b$ și $b \parallel c$, atunci $a \parallel c$”. Această proprietate se numește *tranzitivitatea relației de paralelism*.

Reține!

- Două drepte coplanare care nu au niciun punct comun se numesc **drepte paralele**.
- Două drepte coplanare care au un punct comun se numesc **drepte concurente**.
- *Printr-un punct exterior unei drepte date se poate duce o singură paralelă la acea dreaptă (Axioma lui Euclid).*
- Relația de paralelism are următoarele proprietăți: **reflexivitate**, **simetrie** și **tranzitivitate**.

Aplicăm cunoștințele

1. Se consideră o dreaptă d, un punct A care nu aparține dreptei d și două puncte distincte M și N astfel încât dreptele AM și AN să fie paralele cu dreapta d.
Demonstrează că punctele A, M, N sunt coliniare.

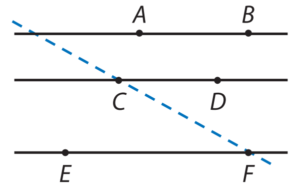


Ipoteza: $A \notin d$, $M \neq N$; $AM \parallel d$, $AN \parallel d$.

Concluzia: A, M, N – puncte coliniare.

Rezolvare: Din $AM \parallel d$, $AN \parallel d$ și din proprietatea de tranzitivitate a relației de paralelism rezultă că $AM \parallel AN$. Din axioma lui Euclid rezultă că prin punctul A, exterior dreptei d, trece o singură paralelă la dreapta d, adică dreptele AM și AN coincid. Prin urmare, punctele A, M, N se află pe aceeași dreaptă, adică sunt coliniare.

2. În figura alăturată, dreptele AB, CD și EF sunt paralele. Demonstrează că dreptele AB și CF sunt concurente.



Ipoteza: $AB \parallel CD \parallel EF$.

Concluzia: AB, CF – drepte concurente.

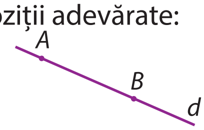
Rezolvare: Dacă dreptele AB și CF nu sunt concurente, atunci ele sunt paralele. Rezultă că $AB \parallel CF$ și, din ipoteză, $AB \parallel CD$. Deci prin punctul C, exterior dreptei AB, am avea două paralele (CD și CF) la dreapta AB, ceea ce contrazice axioma lui Euclid. Ca urmare, dreptele AB și CF nu pot fi paralele. Rezultă că AB și CF sunt drepte concurente.

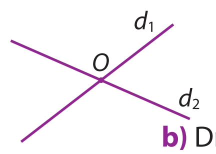
Exersează, fixează și aprofundează cunoștințele

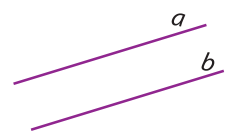
1. Dă câte un exemplu de: **a)** axiomă; **b)** definiție; **c)** teoremă.

2. Desenează trei puncte necoliniare M, N și P. Construiește paralela prin punctul:
a) M la dreapta NP; **b)** N la dreapta MP; **c)** P la dreapta MN.

3. Urmărește cu atenție figurile de mai jos și completează spațiile punctate, astfel încât să obții propoziții adevărate:







a) Dreapta AB și dreapta d ... .
b) Dreptele d_1 și d_2 sunt drepte ... .
c) Punctul O este ... .
d) Dreptele a și b sunt ... .

4. Enunță proprietățile relației de paralelism.

5. Se consideră trei puncte distincte M, N, P și o dreaptă d, astfel încât $MN \parallel d$ și $d \parallel NP$.
a) Realizează un desen care să ilustreze datele problemei.
b) Ce poți spune despre punctele M, N și P? Argumentează răspunsul dat.

6. **Activitate în perechi.** Se consideră trei puncte A, B și C distincte și coliniare și două drepte d_1 și d_2, astfel încât $AB \parallel d_1$ și $BC \parallel d_2$.
a) Realizați un desen care să ilustreze datele problemei.
b) Ce puteți spune despre dreptele d_1 și d_2? Justificați răspunsul dat.

7. Fie m și n două drepte paralele și N un punct pe dreapta n. Demonstrează că orice dreaptă d care intersectează dreapta n în N va intersecta și dreapta m.

8. **a)** Desenează trei puncte distincte A, B și C și două drepte d_1 și d_2, astfel încât $AB \parallel d_1$ și $BC \parallel d_2$.
b) Dacă $d_1 \parallel d_2$, demonstrează că punctele A, B și C sunt coliniare.
c) Dacă punctele A, B și C sunt coliniare, demonstrează că $d_1 \parallel d_2$ sau că d_1 coincide cu d_2.

9. Se consideră patru puncte distincte A, B, C, D și o dreaptă d, astfel încât $AB \parallel d$, $BC \parallel d$ și $CD \parallel d$. Demonstrează că $AD \parallel d$.

AUTOEVALUARE

10 min

1. Dacă apreciezi că afirmația este adevărată, încercuiește litera A. În caz contrar, încercuiește litera F. Dreptele a, b și c sunt drepte coplanare distincte. **4,5 puncte**

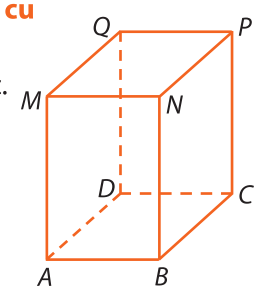
a) Dacă $a \parallel b$ și $b \parallel c$, atunci $a \parallel c$. A F

b) Dacă $a \parallel b$ și $b \cap c \neq \varnothing$, atunci $a \parallel c$. A F

c) Dacă $a \nparallel b$, atunci $a \cap b \neq \varnothing$. A F

2. Unește, prin săgeți, fiecare enunț aflat în coloana din stânga cu răspunsul corespunzător aflat în coloana din dreapta. **3 puncte**

În figura alăturată este reprezentat un paralelipiped dreptunghic.



a) Dreptele AB și AD sunt ...

b) Dreptele AM și BC sunt ...

c) Dreptele MN și QP sunt ...

1) paralele;

2) identice;

3) necoplanare;

4) concurente.

3. Completează casetele cu răspunsurile corecte. **1,5 puncte**

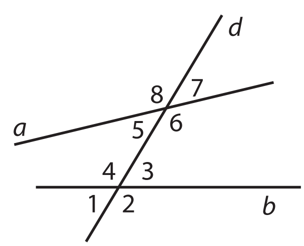
Urmărește figura de la exercițiul 2.

a) Muchiile paralele de pe fața $BCPN$ sunt $\boxed{}$. b) Muchiile concurente de pe fața $ADQM$ sunt $\boxed{}$.

Din oficiu: 1 punct

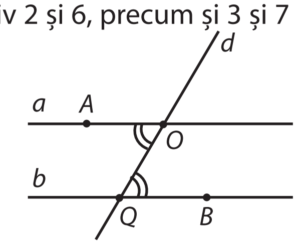
V.2.2. CRITERII DE PARALELISM. UNGHIURI FORMATE DE DOUĂ DREPTE PARALELE CU O SECANTĂ

Observăm și descoperim cunoștințe noi



1. În figura alăturată sunt reprezentate două drepte a și b intersectate de o dreaptă d. În limbaj obișnuit se spune că dreapta d „taie” dreptele a și b. În geometrie se spune că dreapta d *intersectează* dreptele a și b sau că dreapta d *este secantă* dreptelor a și b. Secanta d formează cu dreptele a și b opt unghiuri. Numerotând unghiurile ca în figura alăturată, putem observa că:

- unghiurile 3 și 5 sunt poziționate de o parte și de alta a secantei d și între dreptele a și b. Din acest motiv, despre perechea de unghiuri 3 și 5 se spune că sunt *unghiuri alterne interne*. Au poziție de unghiuri alterne interne și unghiurile 4 și 6;
- unghiurile 1 și 7 sunt poziționate de o parte și de alta a secantei d și în exteriorul dreptelor a și b. În acest caz spunem că unghiurile 1 și 7 formează o pereche de *unghiuri alterne externe*. Unghiurile 2 și 8 formează și ele o pereche de unghiuri alterne externe;
- unghiurile 3 și 6, respectiv unghiurile 4 și 5 formează perechi de *unghiuri interne de aceeași parte a secantei* datorită poziției pe care o ocupă;
- unghiurile 1 și 8, respectiv 2 și 7 reprezintă perechi de *unghiuri externe de aceeași parte a secantei*;
- poziția ocupată de unghiul 1 în raport cu dreapta b și secanta d este aceeași cu poziția ocupată de unghiul 5 în raport cu dreapta a și secanta d. Din acest motiv, despre perechea de unghiuri 1 și 5 spunem că sunt *unghiuri corespondente*. Perechile de unghiuri 4 și 8, respectiv 2 și 6, precum și 3 și 7 sunt și ele unghiuri corespondente.



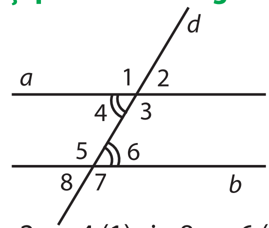
2. O condiție suficientă ca două drepte să fie paralele este exprimată de **teorema de existență a dreptelor paralele** care are următorul enunț: **„Dacă două drepte determină cu o secantă o pereche de unghiuri alterne interne congruente, atunci dreptele sunt paralele.”**

Ipoteza: $a \cap d = \{O\}$, $b \cap d = \{Q\}$; $\sphericalangle AOQ \equiv \sphericalangle BQO$.

Concluzia: $a \parallel b$.

Observații:

1. Consecințele acestei teoreme reprezintă alte criterii de paralelism.
Astfel, **dacă cele două drepte *a* și *b* formează cu secanta *d* o pereche de unghiuri alterne interne congruente, putem demonstra că cele două drepte formează cu secanta și perechi de unghiuri:**
a) alterne externe congruente;
b) corespondente congruente;
c) interne de aceeași parte a secantei suplementare;
d) externe de aceeași parte a secantei suplementare.



a) *Ipoteza:* $\sphericalangle 4 \equiv \sphericalangle 6$.

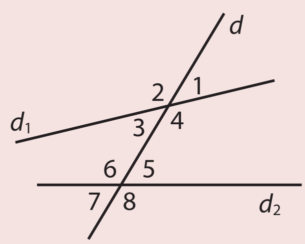
Concluzia: $\sphericalangle 2 \equiv \sphericalangle 8$ și $\sphericalangle 1 \equiv \sphericalangle 7$.

Demonstrație: Cum $\sphericalangle 2$ și $\sphericalangle 4$, respectiv $\sphericalangle 8$ și $\sphericalangle 6$ sunt opuse la vârf, rezultă că $\sphericalangle 2 \equiv \sphericalangle 4$ (1) și $\sphericalangle 8 \equiv \sphericalangle 6$ (2). Din ipoteză, $\sphericalangle 4 \equiv \sphericalangle 6$ și, ținând cont de (1) și (2), rezultă că $\sphericalangle 2 \equiv \sphericalangle 8$ (3). Dar $\sphericalangle 1$ și $\sphericalangle 7$ sunt suplementele unghiurilor 2 și 8, adică $\sphericalangle 1 = 180° - \sphericalangle 2 \overset{(3)}{=} 180° - \sphericalangle 8 = \sphericalangle 7$, adică $\sphericalangle 1 \equiv \sphericalangle 7$. Deci $\sphericalangle 2 \equiv \sphericalangle 8$ și $\sphericalangle 1 \equiv \sphericalangle 7$.
Asemănător se demonstrează **b)**, **c)** și **d)**.

2. Oricare dintre cele patru teoreme demonstrate sunt consecințe ale teoremei de existență a dreptelor paralele și poate reprezenta un criteriu de paralelism.
3. Dacă într-o teoremă ipoteza sau o parte din ipoteză se schimbă cu concluzia, spunem că am obținut o reciprocă a teoremei. Nu orice reciprocă a unei teoreme este adevărată.
4. Teoremele reciproce ale criteriilor de paralelism oferă proprietățile dreptelor paralele intersectate de o secantă.

Reține!

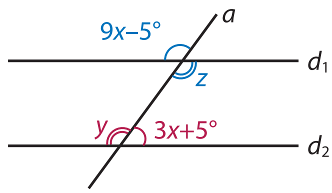
- O secantă formează cu două drepte distincte opt unghiuri. După poziția pe care o au față de drepte și față de secantă, aceste unghiuri formează perechi remarcabile de unghiuri:
  - **alterne interne**: 3 cu 5 și 4 cu 6;
  - **alterne externe**: 1 cu 7 și 2 cu 8;
  - **corespondente**: 1 cu 5, 2 cu 6, 3 cu 7 și 4 cu 8;
  - **interne de aceeași parte a secantei**: 3 cu 6 și 4 cu 5;
  - **externe de aceeași parte a secantei**: 1 cu 8 și 2 cu 7.



• Criterii de paralelism	• Proprietățile unghiurilor formate de două drepte paralele cu o secantă
C1. Dacă două drepte formează cu o secantă o pereche de unghiuri alterne interne congruente, atunci dreptele sunt paralele.	**P1.** Dacă două drepte sunt paralele, atunci ele formează cu orice secantă perechi de unghiuri alterne interne congruente.
C2. Dacă două drepte formează cu o secantă o pereche de unghiuri alterne externe congruente, atunci dreptele sunt paralele.	**P2.** Dacă două drepte sunt paralele, atunci ele formează cu orice secantă perechi de unghiuri alterne externe congruente.
C3. Dacă două drepte formează cu o secantă o pereche de unghiuri corespondente congruente, atunci dreptele sunt paralele.	**P3.** Dacă două drepte sunt paralele, atunci ele formează cu orice secantă perechi de unghiuri corespondente congruente.
C4. Dacă două drepte formează cu o secantă o pereche de unghiuri interne de aceeași parte a secantei suplementare, atunci dreptele sunt paralele.	**P4.** Dacă două drepte sunt paralele, atunci ele formează cu orice secantă perechi de unghiuri interne de aceeași parte a secantei suplementare.
C5. Dacă două drepte formează cu o secantă o pereche de unghiuri externe de aceeași parte a secantei suplementare, atunci dreptele sunt paralele.	**P5.** Dacă două drepte sunt paralele, atunci ele formează cu orice secantă perechi de unghiuri externe de aceeași parte a secantei suplementare.

Aplicăm cunoștințele

Cele patru unghiuri din figura alăturată sunt unghiuri formate de secanta a cu dreptele paralele d_1 și d_2 și au măsurile exprimate în grade. Calculează măsurile celor patru unghiuri.



Rezolvare:

Deoarece unghiurile opuse la vârf au măsurile egale rezultă că $9x-5°=z$.
Unghiurile cu măsurile z și $3x+5°$, fiind formate de dreptele paralele d_1 și d_2 cu secanta a și, fiind unghiuri interne de aceeași parte a secantei, sunt suplementare (*proprietățile unghiurilor formate de două drepte paralele cu o secantă*). Rezultă că $z+3x+5°=180°$. Din cele două egalități de mai sus rezultă că $9x-5°+3x+5°=180°$, de unde $12x=180°$ și $x=15°$. Deoarece $9x-5°=z$, rezultă că $z=9\cdot 15°-5°=130°$.
Cum $d_1 \parallel d_2$, a este secantă și unghiurile z și y sunt alterne interne, rezultă că $y=z$ (*proprietățile unghiurilor formate de două drepte paralele cu o secantă*). Am obținut: $x=15°$, $y=z=130°$ și $z+3x+5°=180°$, de unde $3x+5°=180°-130°=50°$. Rezultă că cele patru unghiuri au măsurile: 130°, 130°, 50° și 50°.

Exersează, fixează și aprofundează cunoștințele

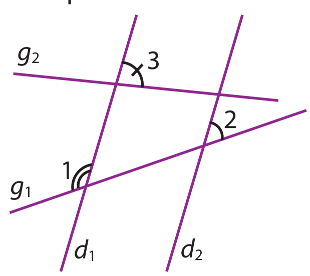
1. Desenează două drepte m și n și o secantă a. Notează cu cifre unghiurile formate și scrie perechi de unghiuri:

a) alterne interne; **b)** alterne externe; **c)** corespondente.

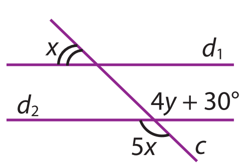
2. **a)** Desenează două drepte paralele intersectate de o secantă, care formează un unghi cu măsura de 63°.
b) Calculează măsurile celorlalte unghiuri formate.

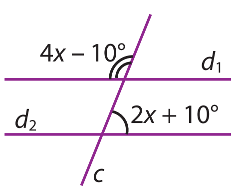
3. Se consideră un triunghi ABC. Prin punctul A se construiește paralela la dreapta BC. Calculează $\sphericalangle A+\sphericalangle B+\sphericalangle C$. Ce observi?

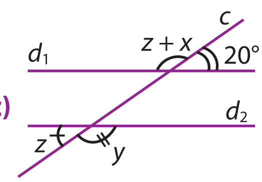
4. În figura alăturată se știe că: $\sphericalangle 1=130°$, $\sphericalangle 2=50°$, $\sphericalangle 3=70°$. Arată că:
a) dreptele d_1 și d_2 sunt paralele;
b) dreptele g_1 și g_2 nu sunt paralele.



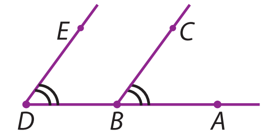
5. Determină măsurile de unghiuri exprimate în grade prin x, y și z, din figurile de mai jos, știind că dreptele d_1 și d_2 sunt paralele.

a)


b)


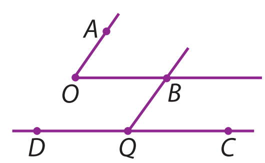
c)


6. Unghiurile ABC și ADE din figura alăturată sunt congruente. Se notează cu OM, respectiv cu ON, bisectoarele unghiurilor ABC și ADE. Demonstrează că dreptele OM și ON sunt paralele.



7. În figura alăturată, unghiurile AOB și CQB sunt unghiuri cu laturile respectiv paralele, adică $OA \parallel QB$ și $OB \parallel QC$, iar QD este semidreapta opusă semidreptei QC. Demonstrează că:

a) $\sphericalangle AOB \equiv \sphericalangle BQC$; **b)** $\sphericalangle AOB+\sphericalangle BQD=180°$.

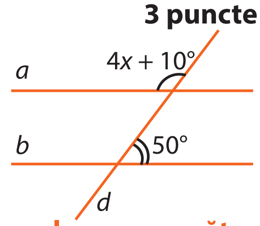


AUTOEVALUARE

1. Încercuiește litera corespunzătoare răspunsului corect. **3 puncte**

a) Două drepte formează cu o secantă două unghiuri corespondente, cu măsurile de 64° și $2x - 14°$. Cele două drepte sunt paralele dacă x este egal cu:

A. 30°; **B.** 39°; **C.** 33°; **D.** 25°.

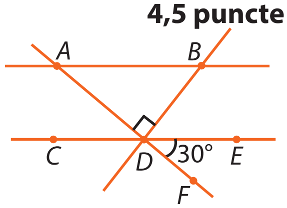


b) În figura alăturată dreptele a și b sunt paralele. Valoarea lui x este:

A. 50°; **B.** 25°; **C.** 30°; **D.** 100°.

2. Unește, prin săgeți, fiecare enunț aflat în coloana din stânga cu răspunsul corespunzător aflat în coloana din dreapta. **4,5 puncte**

În figura alăturată dreptele AB și CD sunt paralele. Dacă $\sphericalangle EDF = 30°$, atunci:



a) $\sphericalangle BAD = ...$	**1)** 90°;
b) $\sphericalangle BDE = ...$	**2)** 150°;
c) $\sphericalangle CDF = ...$	**3)** 60°;
	4) 30°.

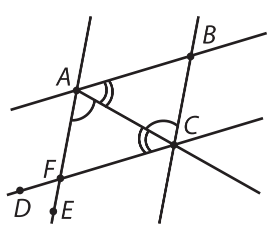
3. Completează caseta cu răspunsul corect. **1,5 puncte**

Două drepte paralele formează cu o secantă o pereche de unghiuri alterne interne cu măsurile, exprimate în grade, egale cu x, respectiv cu y. Dacă $x + y = 180°$, atunci x este egal cu ☐.

Din oficiu: 1 punct

V.2.3. APLICAȚII PRACTICE ÎN POLIGOANE ȘI CORPURI GEOMETRICE

Rezolvăm, observăm și descoperim cunoștințe noi



1. Considerăm trei puncte necoliniare A, B și C.

a) Construcția paralelei prin punctul C la dreapta AB. Folosim teorema de existență a dreptelor paralele: *dacă două drepte formează cu o secantă o pereche de unghiuri alterne interne congruente, atunci dreptele sunt paralele.*

Parcurgem următorii pași:

1) măsurăm $\sphericalangle BAC$;

2) construim $\sphericalangle ACD$, astfel încât $\sphericalangle ACD \equiv \sphericalangle BAC$;

3) $\sphericalangle ACD$ și $\sphericalangle BAC$ au poziție de unghiuri alterne interne pentru dreptele AB, CD și secanta AC și sunt congruente.

4) ne aflăm astfel în condițiile teoremei de existență a dreptelor paralele și, ca urmare, $AB \parallel CD$, adică paralela prin punctul C la dreapta AB este dreapta CD.

b) Construcția paralelei prin punctul A la dreapta BC.

1) măsurăm $\sphericalangle ACB$;

2) construim $\sphericalangle EAC$, astfel încât $\sphericalangle EAC \equiv \sphericalangle ACB$;

3) $\sphericalangle EAC$ și $\sphericalangle ACB$ au poziție de unghiuri alterne interne pentru dreptele BC, AE și secanta AC și sunt congruente;

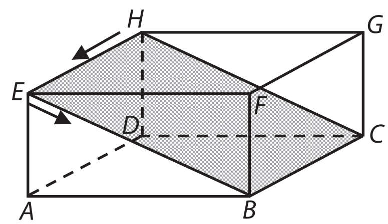
4) ne aflăm în condițiile teoremei de existență a dreptelor paralele și, ca urmare, $AE \parallel BC$, adică paralela prin punctul A la dreapta BC este dreapta AE. Notăm $AE \cap CD = \{F\}$.

Observații:

1) Figura $ABCF$, obținută construind paralela prin punctul C la dreapta AB și paralela prin punctul A la dreapta BC, se numește **paralelogram**. Deci, în paralelogramul $ABCF$, laturile AB și CF, respectiv BC și AF sunt paralele, adică $AB \parallel CF$ și $BC \parallel AF$.

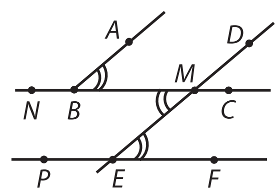
Arătăm că unghiurile BAF și BCF sunt congruente. Din $AE \cap CD = \{F\}$ rezultă că dreptele AF și AE, respectiv CF și CD coincid. De asemenea, $\sphericalangle FAC$ coincide cu $\sphericalangle EAC$ și $\sphericalangle FCA$ coincide cu $\sphericalangle DCA$. Calculăm $\sphericalangle BAF = \sphericalangle BAC + \sphericalangle CAF = \sphericalangle FCA + \sphericalangle BCA = \sphericalangle BCF$ (am folosit congruența unghiurilor alterne interne formate de dreptele paralele: $CF \parallel AB$ și $AF \parallel BC$). Deci, $\sphericalangle BAF \equiv \sphericalangle BCF$.
Arătăm că unghiurile BAF și ABC, respectiv BAF și AFC sunt unghiuri suplementare. Unghiurile BAF și ABC au poziție de unghiuri interne de aceeași parte a secantei pentru dreptele paralele AF și BC și secanta AB. Deci, $\sphericalangle BAF + \sphericalangle ABC = 180°$. Unghiurile BAF și AFC au poziție de unghiuri interne de aceeași parte a secantei pentru dreptele paralele AB și CF și secanta AF. Deci, $\sphericalangle BAF + \sphericalangle AFC = 180°$.
2) Proprietățile demonstrate anterior reprezintă o parte dintre proprietățile unui paralelogram, figură geometrică pe care o veți studia în clasa a VII-a.

2. Considerăm un paralelipiped dreptunghic $ABCDEFGH$, confecționat din lemn de tei. Ștefan dorește să-și confecționeze o jucărie din acest paralelipiped dreptunghic. Pentru aceasta folosește un fierăstrău și taie paralelipipedul de sus în jos, de-a lungul muchiei HE și de-a lungul segmentului EB, desenat pe fața $ABFE$ a paralelipipedului dreptunghic. După tăiere, Ștefan obține două corpuri care au fața $BCHE$ (hașurată în figura alăturată) și, cu ajutorul unui echer, constată că $\sphericalangle EBC$ și $\sphericalangle HCB$ sunt unghiuri drepte. El dorește să știe dacă dreptele BE și CH sunt paralele, însă Ștefan nu dispune de niciun instrument care să-l ajute să găsească răspunsul. Să-l ajutăm să afle răspunsul corect!



***Rezolvare*:** Deoarece $\sphericalangle EBC$ și $\sphericalangle HCB$ sunt unghiuri drepte, rezultă că $\sphericalangle EBC = 90°$ și $\sphericalangle HCB = 90°$. Suma măsurilor acestor unghiuri este de 180°, deoarece $\sphericalangle EBC + \sphericalangle HCB = 90° + 90° = 180°$. Deci $\sphericalangle EBC$ și $\sphericalangle HCB$ sunt unghiuri suplementare (1). Putem observa că $\sphericalangle EBC$ și $\sphericalangle HCB$ au poziție de unghiuri interne de aceeași parte a secantei pentru dreptele EB, HC și secanta BC. Conform criteriului de paralelism, *dacă două drepte formează cu o secantă o pereche de unghiuri interne de aceeași parte a secantei suplementare, atunci dreptele sunt paralele*; rezultă că dreptele EB și HC sunt paralele, adică $EB \parallel HC$.

3. Două unghiuri ABC și DEF se numesc unghiuri cu laturile paralele dacă $AB \parallel DE$ și $BC \parallel EF$.
a) Iuliana susține că două unghiuri ascuțite care au laturile paralele sunt congruente.
b) Tudor susține că două unghiuri obtuze care au laturile paralele sunt congruente.
c) Sorina susține că, dacă două unghiuri, unul ascuțit și celălalt obtuz, sunt unghiuri cu laturile paralele, atunci cele două unghiuri sunt suplementare.
Cine are dreptate? Să-i ajutăm!



***Rezolvare*:**
a) Fie $\sphericalangle ABC$ și $\sphericalangle DEF$ unghiuri cu laturile paralele, adică $AB \parallel DE$ și $BC \parallel EF$. Conform teoremei: *dacă două drepte sunt paralele, atunci orice dreaptă care o intersectează pe una, o intersectează și pe cealaltă*, avem $AB \parallel DE$ și dreapta CB o intersectează pe AB în punctul B; rezultă că CB o va intersecta și pe DE. Fie $BC \cap DE = \{M\}$. Dreptele paralele AB, ED și secanta BM formează $\sphericalangle ABM$ și $\sphericalangle BME$ alterne interne congruente, adică $\sphericalangle ABM \equiv \sphericalangle BME$ (1). Analog, dreptele paralele BC, EF și secanta EM formează $\sphericalangle BME$ și $\sphericalangle FEM$ alterne interne congruente, adică $\sphericalangle BME \equiv \sphericalangle FEM$ (2). Din (1) și (2) rezultă că $\sphericalangle ABM \equiv \sphericalangle FEM$ (3), adică $\sphericalangle ABC \equiv \sphericalangle FED$ și **unghiurile ascuțite cu laturile respectiv paralele sunt congruente**. Deci, Iuliana are dreptate.
b) Semidreptele BN și EP sunt semidrepte opuse semidreptelor BC și EF. Deci punctele N, B, M, C sunt coliniare și punctele P, E, F sunt coliniare. Unghiurile ABN și MEP sunt unghiuri cu laturile paralele, deoarece $AB \parallel ME$ și $BN \parallel PE$. Dar $\sphericalangle ABN$ este suplementul $\sphericalangle ABM$, adică $\sphericalangle ABN = 180° - \sphericalangle ABM$ (4) și cum $\sphericalangle ABM$ este unghi ascuțit, rezultă că $\sphericalangle ABN$ este unghi obtuz. Analog, $\sphericalangle MEP$ este suplementul $\sphericalangle MEF$, adică $\sphericalangle MEP = 180° - \sphericalangle FEM$ (5) și cum $\sphericalangle FEM$ este unghi ascuțit, rezultă că $\sphericalangle MEP$ este unghi obtuz. Din (3), (4) și (5) rezultă că $\sphericalangle ABN \equiv \sphericalangle MEP$, adică **unghiurile obtuze cu laturile respectiv paralele sunt congruente**. Deci, Tudor are dreptate.

c) Unghiurile *ABN* și *MEF* sunt unghiuri cu laturile paralele, deoarece $AB \parallel ME$ și $BN \parallel EF$. Unghiul *ABN* este suplementul unghiului ascuțit *ABM* și ca urmare este unghi obtuz și unghiul *MEF* este unghi ascuțit. Din $\measuredangle ABM + \measuredangle ABN = 180°$ și $\measuredangle ABM \equiv \measuredangle MEF$ (demonstrat la punctul a)) rezultă că $\measuredangle MEF + \measuredangle ABN = 180°$, adică **două unghiuri cu laturile respectiv paralele, unul ascuțit și celălalt obtuz, sunt suplementare**. Deci, Sorina are dreptate.

Exersează, fixează și aprofundează cunoștințele

1. În figura 1 se știe că $BC \parallel DE$, $\measuredangle ABC = 45°$ și $\measuredangle AED = 60°$. Calculează măsurile unghiurilor:
a) $\measuredangle ACB$; **b)** $\measuredangle ADE$; **c)** $\measuredangle CED$.

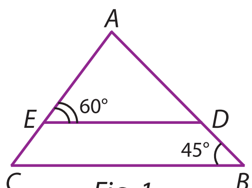


Fig. 1

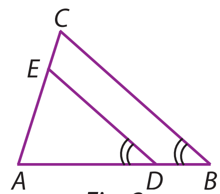


Fig. 2

2 În figura 2 se știe că $\measuredangle ADE \equiv \measuredangle ABC$.
a) Ce poți spune despre dreptele *ED* și *BC*? Justifică.
b) Ce fel de unghiuri sunt *AED* și *ACB*?
c) Calculează suma măsurilor *ADE* și *BDE*. Justifică.

3. În figura 3 se știe că $\measuredangle MQP = 30°$ și $\measuredangle NPQ = 150°$.
a) Precizează dreptele paralele din figură. Justifică.
b) Calculează suma măsurilor unghiurilor *QMN* și *PNM*.

4. În figura 4, triunghiul *ABC* a fost translatat spre dreapta cu 9 pătrățele. Scrie dreptele paralele din figură.

5. În figura 5 se știe că $EF \parallel AB$, $DE \parallel BC$ și $\measuredangle DEF = 70°$. Calculează măsurile:
a) $\measuredangle BDE$; **b)** $\measuredangle ADE$; **c)** $\measuredangle ABC$; **d)** $\measuredangle BFE$; **e)** $\measuredangle EFC$.

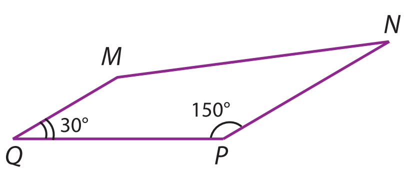


Fig. 3

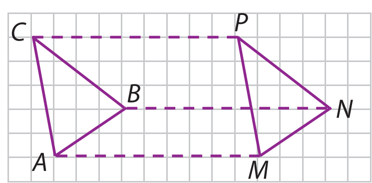


Fig. 4

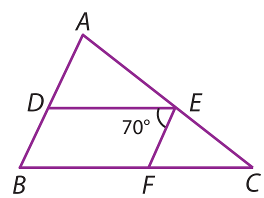


Fig. 5

6. Urmărește figura 6, în care *ABCD* este paralelogram, *ABHG* este dreptunghi și *ADEF* este pătrat.
a) Scrie perechile de drepte paralele din figură.
b) Dreapta *EF* este paralelă cu dreapta *BC*? Justifică.
c) Dreapta *CD* este paralelă cu dreapta *HG*? Justifică.

7. Activitate în perechi. În figura 7 este desenată o piramidă care are la bază pătratul *ABCD*.
a) Numiți dreptele paralele din figură.
b) Numiți unghiuri interne de aceeași parte a secantei pentru dreptele *AB*, *CD* și secanta *BC*.

8. În figura 8, *MNPQRSTV* este un paralelipiped dreptunghic. Scrie toate dreptele paralele cu:
a) *MR*; **b)** *NP*; **c)** *RS*.

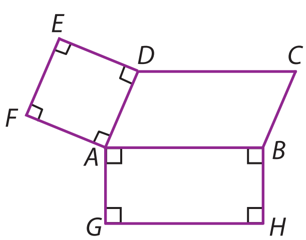


Fig. 6

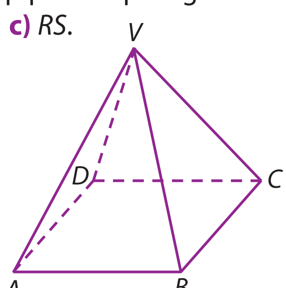


Fig. 7

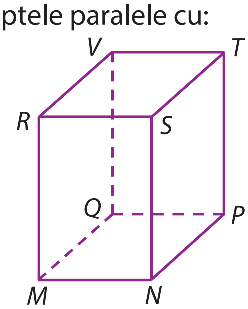
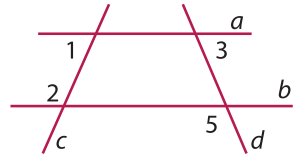


Fig. 8

Exerciții și probleme recapitulative

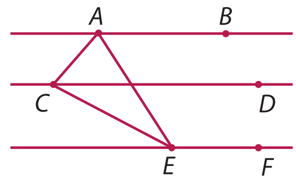


1. În figura alăturată se știe că $\sphericalangle 1 = 40° + x°$ și $\sphericalangle 2 = 140° - x°$.

a) Verifică dacă dreptele a și b sunt paralele.

b) Dacă $\sphericalangle 5 = 120°$, calculează măsura unghiului 3.

2. Două drepte paralele a și b, intersectate de o secantă c, determină opt unghiuri. Măsurile a două dintre acestea sunt exprimate în grade prin $2x° + 19°$, respectiv $3x° - 19°$. Calculează măsurile celor opt unghiuri.



3. În figura alăturată, $AB \parallel CD \parallel EF$. Calculează:

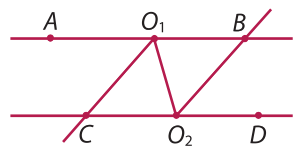
a) $\sphericalangle BAC + \sphericalangle ACE + \sphericalangle CEF$;

b) $\sphericalangle ACE + \sphericalangle CEA + \sphericalangle EAC$.

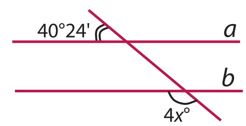
4. **a)** Desenează două drepte paralele a și b, intersectate de o secantă c, apoi notează cu cifre unghiurile formate.

b) Scrie perechile de unghiuri suplementare. **c)** Scrie perechile de unghiuri congruente.

5. Se consideră unghiurile ABC și MNP, astfel încât $AB \parallel MN$ și $BC \parallel NP$. Calculează măsura unghiului MNP, știind că $\sphericalangle ABC = 75°$.

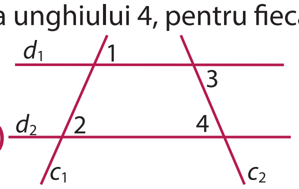


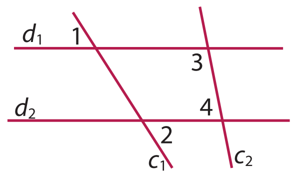
6. În figura alăturată, dreptele AB și CD sunt paralele. Semidreptele O_1C și O_2B sunt bisectoarele unghiurilor AO_1O_2, respectiv O_1O_2D. Demonstrează că $O_1C \parallel O_2B$.

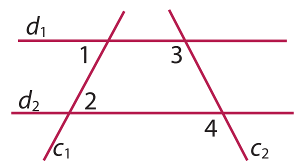


7. Determină x, astfel încât dreptele a și b din figura alăturată să fie paralele.

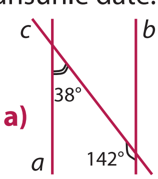
8. În figurile de mai jos se știe că $\sphericalangle 1 \equiv \sphericalangle 2$ și că măsura unghiului 3 este egală cu $x°$. Calculează măsura unghiului 4, pentru fiecare caz.

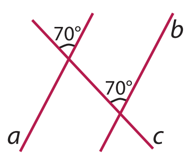
a) 

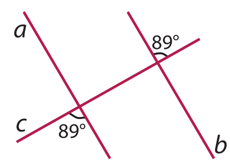
b) 

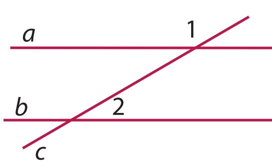
c) 

9. Pentru fiecare figură geometrică de mai jos, precizează dacă dreptele a și b sunt paralele. Justifică răspunsurile date.

a) 

b) 

c) 

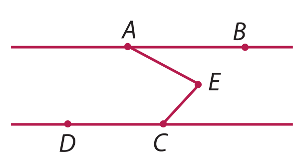


10. În figura alăturată, dreptele a și b sunt paralele. Știind că $\sphericalangle 2 = \dfrac{1}{5} \cdot \sphericalangle 1$, calculează măsura unghiului 2.

11. Se consideră patru puncte A, B, C și D, astfel încât $AB \parallel CD$ și $AD \parallel BC$.

a) Realizează un desen care să ilustreze datele problemei.

b) Știind că $\sphericalangle BAD = \sphericalangle ABC + 40°$, calculează măsurile unghiurilor: ABC, BCD, CDA și BAD.



12. În figura alăturată, $AB \parallel CD$, $\sphericalangle BAE = 30°$ și $\sphericalangle DCE = 119°$. Calculează măsura unghiului AEC.

EVALUARE

Timp de lucru: 50 de minute.

Subiectul I. Dacă apreciezi că afirmația este adevărată, completează căsuța alăturată cu litera A. În caz contrar, completează cu litera F.

(5p) **1.** Dacă două drepte formează cu o secantă o pereche de unghiuri alterne interne congruente, atunci dreptele sunt paralele. ☐

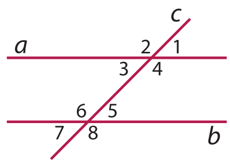
(5p) **2.** Dacă două drepte sunt paralele, atunci ele formează cu orice secantă o pereche de unghiuri interne de aceeași parte a secantei suplementare. ☐

(5p) **3.** Printr-un punct exterior unei drepte se pot duce două paralele la dreapta respectivă. ☐

(5p) **4.** Două drepte coplanare care au un punct comun se numesc drepte paralele. ☐

Subiectul II. Unește, prin săgeți, fiecare cifră corespunzătoare enunțurilor din coloana **A** cu litera care indică răspunsul corect, aflat în coloana **B**.

În figura alăturată, dreptele *a* și *b* sunt paralele, iar dreapta *c* este secanta lor.



A

(5p) **1.** $\sphericalangle 2$ și $\sphericalangle 8$ se numesc unghiuri ...

(5p) **2.** $\sphericalangle 4$ și $\sphericalangle 6$ se numesc unghiuri ...

(5p) **3.** $\sphericalangle 1$ și $\sphericalangle 5$ se numesc unghiuri ...

(5p) **4.** $\sphericalangle 2$ și $\sphericalangle 7$ se numesc unghiuri ...

B

a) alterne interne;

b) alterne externe;

c) corespondente;

d) interne de aceeași parte a secantei;

e) externe de aceeași parte a secantei.

Subiectul III. Alege litera care indică singura variantă corectă.

(5p) **1.** Două drepte paralele formează cu o secantă o pereche de unghiuri interne de aceeași parte a secantei, cu măsurile $7x$ și $40°$. Valoarea lui x este egală cu:

A. $140°$; **B.** $70°$; **C.** $30°$; **D.** $20°$.

(5p) **2.** Două drepte paralele formează cu o secantă o pereche de unghiuri corespondente, cu măsurile de $102°$ și $7x + 4°$. Valoarea lui x este egală cu:

A. $98°$; **B.** $14°$; **C.** $78°$; **D.** $89°$.

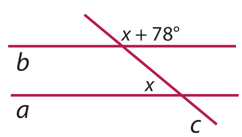
(5p) **3.** Construiește un unghi *AOB* cu măsura de $70°$. Construiește $BC \parallel AO$, astfel încât punctele *A* și *C* să fie situate de o parte și de alta a dreptei *OB*. Măsura unghiului *OBC* este egală cu:

A. $140°$; **B.** $35°$; **C.** $70°$; **D.** $30°$.

(5p) **4.** În figura alăturată, se știe că $a \parallel b$ și *c* este secantă. Analizând figura și făcând calcule, obții că valoarea lui *x* este egală cu:

A. $51°$; **B.** $12°$;

C. $39°$; **D.** $102°$.



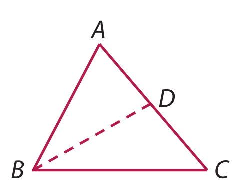
La subiectul IV scrie rezolvarea completă.

Subiectul IV. În figura alăturată, semidreapta *BD* este bisectoarea unghiului *ABC*, $\sphericalangle ABD = 30°$ și $\sphericalangle BCD = 50°$.

(10p) **a)** Construiește $DE \parallel BC$, $E \in AB$, și calculează măsura unghiului *BDE*.

(10p) **b)** Calculează măsura unghiului *EDC*.

(10p) **c)** Construiește $EF \parallel AC$, $F \in BC$, și calculează măsura unghiului *BEF*.



Se acordă 10 puncte din oficiu. Nota se obține împărțind punctajul final la 10.

Subiectul	I.1	I.2	I.3	I.4	II.1	II.2	II.3	II.4	III.1	III.2	III.3	III.4	IV.a	IV.b	IV.c
Punctajul															
Nota															

V.3. PERPENDICULARITATE

V.3.1. Drepte perpendiculare în plan. Oblice

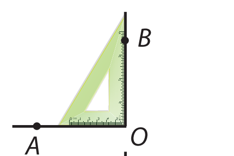
Ne amintim

În clasa a V-a am învățat că un unghi cu măsura de 90° se numește unghi drept. Pentru a verifica dacă un unghi este drept, fie măsurăm unghiul cu raportorul, fie probăm cu echerul.

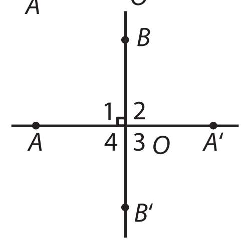
Rezolvăm, observăm și descoperim cunoștințe noi

1. a) Desenează un unghi drept *AOB* cu ajutorul echerului.
b) Notează cu *OA′* semidreapta opusă semidreptei *OA* și cu *OB′* semidreapta opusă semidreptei *OB*.
c) Câte unghiuri formează dreptele *AA′* și *BB′*? Fără a folosi echerul sau raportorul, justifică congruența unghiurilor formate de dreptele *AA′* și *BB′*.

a)

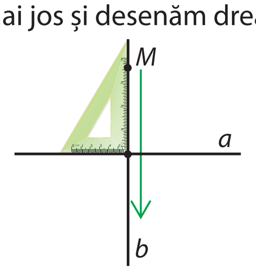


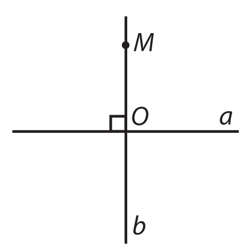
b)



***Rezolvare*:**
c) Se formează patru unghiuri, congruente două câte două, ca unghiuri opuse la vârf. Prin urmare, $\sphericalangle 3 \equiv \sphericalangle 1$ și cum $\sphericalangle 1 = 90°$ (din construcție), rezultă că $\sphericalangle 3 = 90°$. Deoarece $\sphericalangle 1$ împreună cu $\sphericalangle 2$ formează unghiul alungit *AOA′*, rezultă că $\sphericalangle 1 + \sphericalangle 2 = 180°$. Cum $\sphericalangle 1 = 90°$ (din construcție), rezultă că $\sphericalangle 2 = 90°$. Cum $\sphericalangle 2$ este opus la vârf cu $\sphericalangle 4$, ele sunt congruente și $\sphericalangle 4 = 90°$. Prin urmare, dreptele *AA′* și *BB′*, concurente în punctul *O*, formează patru unghiuri drepte. Se spune că dreptele *AA′* și *BB′* sunt drepte perpendiculare și notăm $AA' \perp BB'$ sau $BB' \perp AA'$.

2. a) Se consideră o dreaptă *a* și un punct *M*, exterior dreptei *a*. Construiește o dreaptă *b* care să conțină punctul *M* și să fie perpendiculară pe dreapta *a*.
b) Analizează ce se întâmplă dacă punctul *M* aparține dreptei *a*.
***Rezolvare*:**
a) Plasăm echerul ca în figura de mai jos și desenăm dreapta *b*.

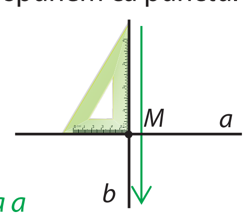




• În acest caz, spunem că *dreapta b este perpendiculara pe dreapta a, dusă prin punctul M* sau că *dreapta b este perpendiculara din M pe dreapta a*.

• Dacă punctul *O* este punctul de intersecție a celor două drepte ($a \cap b = \{O\}$), spunem că punctul *O* este *piciorul perpendicularei coborâte din punctul M pe dreapta a*.

b) Dacă punctul *M* aparține dreptei *a*, se procedează ca la punctul precedent.
Se plasează echerul ca în figura alăturată și se trasează dreapta *b*.

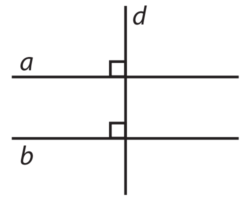


• În acest caz, spunem că dreapta *b* este *perpendiculara în punctul M pe dreapta a* sau *perpendiculara ridicată în punctul M pe dreapta a*.

• *Piciorul perpendicularei în punctul M pe dreapta a coincide cu M*.

3. Se consideră două drepte coplanare a și b, perpendiculare pe o dreaptă d. Demonstrează că dreptele a și b sunt paralele.

Rezolvare:



Dacă dreptele a și b sunt perpendiculare pe dreapta d, ca în figura alăturată, atunci unghiurile marcate pe figură ca fiind unghiuri drepte, au poziție de unghiuri corespondente pentru dreptele a, b și secanta d. Cum cele două unghiuri marcate sunt unghiuri corespondente congruente pentru dreptele a, b și secanta d, rezultă că dreptele a și b sunt paralele.

Observație: Folosind simboluri, putem scrie: dacă $a \perp d$ și $b \perp d$, atunci $a \parallel b$.

Reține!

- Două drepte concurente care formează un unghi cu măsura de 90° se numesc **drepte perpendiculare**.
- Două drepte concurente care nu sunt perpendiculare se numesc **oblice**.
- Două drepte perpendiculare formează patru unghiuri drepte.
- Două oblice formează două unghiuri ascuțite și două unghiuri obtuze, congruente două câte două, ca unghiuri opuse la vârf.
- Dintr-un punct exterior unei drepte putem construi o singură perpendiculară pe o dreaptă dată și oricâte oblice dorim.
- Două drepte coplanare perpendiculare pe aceeași dreaptă sunt paralele.

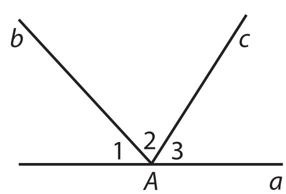
Aplicăm cunoștințele

Demonstrează că perpendiculara dusă dintr-un punct pe o dreaptă este unică.

Rezolvare:

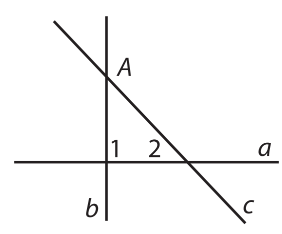
Desenăm o dreaptă a și un punct A. Punctul A poate să aparțină dreptei a sau poate fi exterior dreptei a.

a) Cazul în care punctul A aparține dreptei a ($A \in a$)



Presupunem că prin punctul A se pot duce două perpendiculare pe dreapta a, notate cu b și c ($b \perp a$ și $c \perp a$). În acest caz, unghiurile formate de dreptele b și c cu dreapta a, în punctul A, sunt unghiuri drepte, adică $\sphericalangle 1 = 90°$ și $\sphericalangle 3 = 90°$. Dreptele distincte b și c, concurente în punctul A, determină un unghi nenul, $\sphericalangle 2 > 0$, căci, în caz contrar, dreptele b și c ar coincide. Calculăm $\sphericalangle 1 + \sphericalangle 2 + \sphericalangle 3 =$ $= \sphericalangle 1 + \sphericalangle 3 + \sphericalangle 2 = 90° + 90° + \sphericalangle 2 = 180° + \sphericalangle 2$. Deoarece $180° + \sphericalangle 2 > 180°$, rezultă că $\sphericalangle 1 + \sphericalangle 2 + \sphericalangle 3 > 180°$ (1). Dar suma celor trei unghiuri este un unghi alungit, adică $\sphericalangle 1 + \sphericalangle 2 + \sphericalangle 3 =$ $= 180°$, ceea ce este în contradicție cu (1). Prin urmare, presupunerea făcută este falsă. Deci, în punctul A nu se pot ridica două perpendiculare pe dreapta a.

b) Cazul în care punctul A este exterior dreptei a ($A \notin a$)



Presupunem că prin punctul A se pot duce două perpendiculare pe dreapta a, notate cu b și c ($b \perp a$ și $c \perp a$). În acest caz, $\sphericalangle 1 = 90°$ și $\sphericalangle 2 = 90°$. Deoarece dreptele b și c formează cu secanta a perechea de unghiuri 1 și 2, interne de aceeași parte a secantei suplementare ($\sphericalangle 1 + \sphericalangle 2 = 90° + 90° = 180°$), rezultă că $b \parallel c$, ceea ce este absurd, deoarece dreptele b și c sunt concurente în punctul A. Prin urmare, presupunerea făcută este falsă. Deci, prin punctul A nu se pot duce două perpendiculare pe dreapta a.

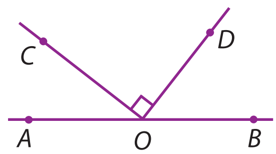
Altfel spus, perpendiculara dintr-un punct pe o dreaptă este unică.

Exersează, fixează și aprofundează cunoștințele

1. **a)** Definește dreptele perpendiculare și oblicele.
b) Desenează două drepte concurente. Verifică cu ajutorul echerului dacă sunt perpendiculare sau oblice.

2. Desenează o dreaptă AB.
a) Desenează un punct M, exterior dreptei AB, astfel încât MA să fie perpendiculară pe AB și MB să fie oblică.
b) Desenează un punct N, exterior dreptei AB, astfel încât NA să fie oblică și NB să fie perpendiculară pe dreapta AB.
c) În fiecare din cazuri măsoară cu raportorul unghiurile formate de perpendiculară și respectiv de oblică cu dreapta AB. Ce observi?

3. În figura alăturată dreptele OC și OD sunt perpendiculare.
a) Calculează suma măsurilor unghiurilor AOC și BOD.
b) Dacă OM și ON sunt bisectoarele unghiurilor AOC, respectiv BOD, calculează măsura unghiului MON.



4. Activitate în perechi. Desenați patru drepte concurente a, b, c, d într-un punct O, care să determine opt unghiuri congruente în jurul punctului O. Numiți dreptele perpendiculare din figură.

5. Desenează trei puncte necoliniare A, B, C. Notează cu M, N și P mijloacele segmentelor AB, BC și AC.
a) Construiește perpendiculara în punctul M pe AB.
b) Construiește perpendiculara în punctul N pe BC.
c) Construiește perpendiculara în punctul P pe AC.

6. **a)** Construiește un unghi obtuz AOB cu măsura de $140°$ și perpendicularele $CO \perp OA$, respectiv $DO \perp OB$, astfel încât punctele C și D să fie interioare unghiului AOB.
b) Calculează măsurile unghiurilor AOD, BOC și COD.

7. **a)** Construiește un unghi ascuțit AOB și perpendicularele $MO \perp OA$, $NO \perp OB$.
b) Tudor susține că unghiurile MON și AOB sunt congruente, iar Camelia susține că unghiurile MON și AOB sunt suplementare. Demonstrează cine are dreptate.

AUTOEVALUARE

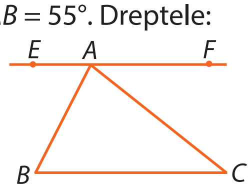
10 min

1. Încercuiește litera corespunzătoare răspunsului corect. **3 puncte**
a) Dacă $AB \perp BC$, atunci $\sphericalangle ABC$ este unghi:
A. ascuțit; **B.** drept; **C.** obtuz; **D.** alungit.
b) Se consideră un unghi AOB cu măsura de $100°$ și semidreapta OD este bisectoarea acestuia. În interiorul unghiului AOD se fixează un punct C, iar în interiorul unghiului BOD se fixează un punct E. Dacă $\sphericalangle AOC = \sphericalangle BOE = 10°$, atunci dreptele:
A. OB și OC sunt oblice; **B.** OA și OE sunt oblice;
C. OB și OC sunt drepte perpendiculare; **D.** OA și OE nu sunt drepte perpendiculare.

2. Unește, prin săgeți, fiecare enunț aflat în coloana din stânga cu răspunsul corespunzător aflat în coloana din dreapta. **4,5 puncte**
În figura alăturată punctele E, A, F sunt coliniare, $\sphericalangle ACB = 35°$, $\sphericalangle ABC = 55°$ și $\sphericalangle EAB = 55°$. Dreptele:

a) AB și BC sunt
b) EF și BC sunt
c) AB și AC sunt

1) identice;
2) oblice;
3) perpendiculare;
4) paralele.

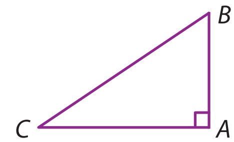


3. Completează spațiul punctat cu răspunsul corect. **1,5 puncte**
Dacă $\sphericalangle AOB$ și $\sphericalangle BOC$ sunt două unghiuri adiacente complementare, atunci dreptele AO și OC sunt ... .

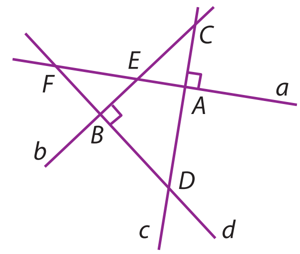
Din oficiu: 1 punct

V.3.2. Aplicații practice în poligoane și corpuri geometrice

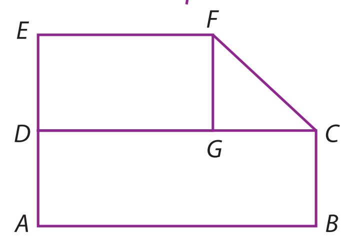
1. În figura alăturată, dreptele AB și AC sunt perpendiculare.
a) Numește o oblică și o perpendiculară pentru dreapta AB.
b) Numește o oblică și o perpendiculară pentru dreapta AC.



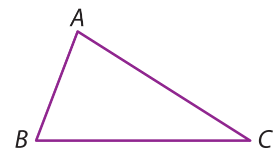
2. **Activitate în perechi.** Analizați figura alăturată și scrieți:
a) perechi de drepte perpendiculare;
b) perechi de oblice;
c) perpendiculara din punctul C pe dreapta d;
d) perpendiculara din punctul C pe dreapta a;
e) perpendiculara din punctul D pe dreapta b.



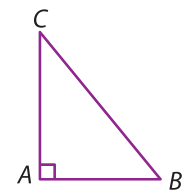
3. În figura alăturată, dreptunghiul $ABCD$ reprezintă un teren cultivat cu legume, dreptunghiul $DEFG$ reprezintă un teren pe care s-a plantat gazon, iar triunghiul CFG reprezintă grădina cu trandafiri din curtea bunicii.
a) Numește perechile de drepte perpendiculare din figură.
b) Numește perechile de oblice din figură.



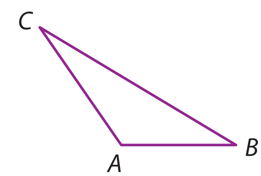
4. În figura alăturată, ABC este un triunghi ascuțitunghic.
a) Desenează figura în caietul tău.
b) Folosind echerul, construiește perpendiculara din punctul A pe dreapta BC și notează cu O piciorul perpendicularei.
c) Numește dreptele perpendiculare și oblicele din figura obținută.



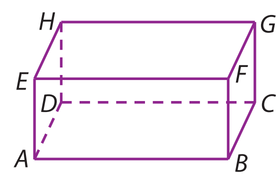
5. **a)** Desenează în caiet triunghiul din figura alăturată ($AB \perp AC$).
b) Folosind echerul, construiește perpendiculara din punctul A pe dreapta BC și notează cu M piciorul perpendicularei.
c) Numește perpendicularele și oblicele din figura obținută.



6. **a)** Desenează în caiet triunghiul ABC din figura alăturată, în care unghiul A este obtuz.
b) Folosind echerul, construiește perpendiculara din punctul C pe dreapta AB și notează cu D piciorul perpendicularei.
c) Folosind echerul, construiește perpendiculara din punctul B pe dreapta AC și notează cu E piciorul perpendicularei.
d) Numește perpendicularele și oblicele din figura obținută.



7. În figura alăturată este desenat un paralelipiped dreptunghic.
a) Analizează fața $ABFE$ și numește dreptele perpendiculare pe AB și dreptele perpendiculare pe AE.
b) Analizează fața $BCGF$ și numește dreptele perpendiculare pe BC și dreptele perpendiculare pe CG.



8. **a)** Desenează un cub $ABCDA'B'C'D'$.
b) Unește punctul A' cu punctul D și pune în evidență segmentul $A'D$, apoi unește punctul A' cu punctul B și pune în evidență segmentul $A'B$.
c) Ce figură geometrică reprezintă fața $BCC'B'$?
d) Pe fața $ADD'A'$, numește o perpendiculară pe dreapta AD și o oblică față de dreapta AD. Mai există o altă perpendiculară pe dreapta AD? Numește-o!
e) Observă fața $ABB'A'$ și scrie perpendicularele pe dreapta AB. Cum sunt dreptele AA' și $A'B$?

V.3.3. Distanța de la un punct la o dreaptă

Rezolvăm, observăm și descoperim cunoștințe noi

Alexandra este în vacanță la bunici. Bunicii ei locuiesc într-o zonă în care nu sunt marcate trecerile de pietoni. Pentru a se întâlni cu prietena ei, Sonia, Alexandra trebuie să traverseze o stradă. Deoarece nu s-au văzut de mult timp, Alexandra dorește să traverseze strada cât mai repede.

În figura 3 sunt indicate patru variante de traversare a străzii. Dacă Alexandra se află în punctul A, ea poate traversa parcurgând distanțele AB, AC, AD sau AO.

a) Cum este indicat să traverseze strada, pentru a ajunge cât mai repede pe partea cealaltă?

b) Va alege Alexandra să parcurgă distanța AB sau AC?

c) Se va orienta Alexandra să aleagă distanța AD sau AO?

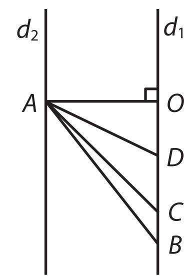


Fig. 3

Rezolvare:

a) Pentru a traversa cât mai repede, Alexandra trebuie să parcurgă drumul cel mai scurt.

b) Dacă ar fi avut de ales doar dintre variantele AB sau AC, Alexandra ar fi ales AC, deoarece $AC < AB$.

c) Având în vedere că pe figură este marcat unghiul drept format de dreapta d_1 cu dreapta AO, rezultă că AO este perpendiculară pe d_1 și, ca urmare, AO are lungimea cea mai mică (lungimea minimă).

Observații:

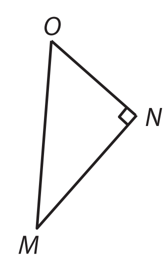
- *Distanța minimă de la punctul A la dreapta d_1* este lungimea segmentului AO, unde A este punctul în care se află Alexandra, iar O este piciorul perpendicularei din punctul A pe dreapta d_1.
- În geometrie, distanțele sunt gândite întotdeauna ca fiind *„drumul cel mai scurt”*.

Reține!

- **Distanța de la un punct exterior unei drepte la acea dreaptă** este lungimea segmentului determinat de punct și de piciorul perpendicularei din punct pe dreaptă.
- Distanța de la un punct la o dreaptă este mai mică decât orice oblică.
- Distanța de la un punct al dreptei la acea dreaptă este egală cu 0 (zero).

Aplicăm cunoștințele

Mihai desenează două oblice OM și ON și susține că „distanța de la punctul M la dreapta ON este lungimea segmentului MN”. Prietenul lui, Nicolae, îl completează: „numai dacă $MN \perp ON$”. Cine are dreptate?



Rezolvare: Distanța de la punctul M la dreapta ON este lungimea segmentului determinat de punctul M și de piciorul perpendicularei din punctul M pe dreapta ON. Pentru ca distanța de la punctul M la dreapta ON să fie MN, trebuie ca punctul N, care se află pe dreapta ON, să fie piciorul perpendicularei din M pe ON, adică dreapta MN să fie perpendiculară pe dreapta ON ($MN \perp ON$). Deci, Nicolae are dreptate.

Exersează, fixează și aprofundează cunoștințele

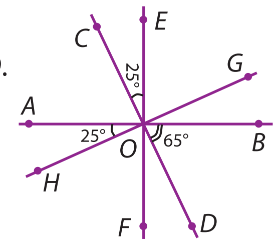
1. **a)** Desenează un unghi ascuțit AOB și un punct M interior unghiului AOB.

b) Construiește perpendicularele din punctul M pe dreptele OA, respectiv OB și notează cu A', respectiv B', picioarele perpendicularelor.

c) Precizează care este distanța de la punctul M la dreapta OA și care este distanța de la punctul M la dreapta OB.

2. Activitate în perechi

În figura alăturată, dreptele AB, CD, EF și GH sunt concurente în punctul O. Folosind măsurile unghiurilor din figură, precizați:



a) dreptele perpendiculare;
b) distanța de la punctul E la dreapta AB;
c) distanța de la punctul C la dreapta HG;
d) distanța de la punctul H la dreapta GH.

3. Se consideră trei puncte distincte A, B, C și o dreaptă d. Se știe că $d(A, d) = 1{,}5$ cm, $d(B, d) = 2$ cm și $d(C, d) = 3$ cm. Realizează un desen care să ilustreze datele problemei. Analizează toate cazurile posibile.

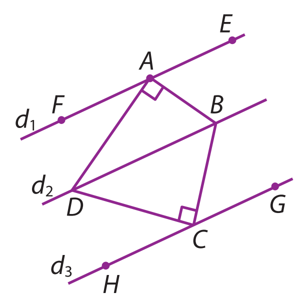
4. a) Calculează distanța de la un punct A la o dreaptă a, știind că $A \in a$. Realizează un desen.
b) Stabilește poziția unui punct D față de o dreaptă d, știind că $d(D, d) = 0$. Realizează un desen.

5. Desenează o dreaptă d și două puncte M și N, astfel încât $d(M, d) = 2$ cm, $d(N, d) = 3$ cm, iar punctele M și N să fie:
a) de aceeași parte a dreptei d; b) de o parte și de alta a dreptei d.

6. Desenează o dreaptă d și un punct A exterior ei. Construiește o oblică din punctul A, care intersectează dreapta d în punctul B, și notează cu O piciorul perpendicularei din punctul A pe dreapta d. Măsoară segmentele AO, AB și unghiul ABO, apoi completează spațiile punctate, pentru a obține propoziții adevărate.

a) Dintre perpendiculară și o oblică construite din același punct pe o dreaptă dată, lungimea mai mică o are ... .

b) Dintre unghiurile formate de o dreaptă cu o oblică și, respectiv, cu perpendiculara dusă din același punct pe dreapta dată, are măsura mai mică unghiul format de ... cu dreapta dată.



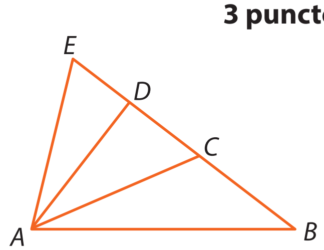
7. În figura alăturată, dreptele d_1, d_2, d_3 sunt paralele și $A \in d_1$, $B \in d_2$, $C \in d_3$, $D \in d_2$. Știind că $BA \perp DA$ și $BC \perp DC$, demonstrează că unghiurile ABC și ADC sunt suplementare.

AUTOEVALUARE

10 min

1. Încercuiește litera corespunzătoare răspunsului corect. **3 puncte**

a) În figura alăturată, punctele B, C, D, E sunt coliniare și $AD \perp CE$. Distanța de la punctul A la dreapta BC este lungimea segmentului:



A. AE; **B.** AD; **C.** AC; **D.** AB.

b) Se consideră un pătrat notat $MNPQ$, cu lungimea laturii de 2,5 cm. Distanța de la punctul P la dreapta MQ este egală cu:

A. 5 cm; **B.** 7,5 cm; **C.** 2,5 cm; **D.** 2 cm.

2. Unește, prin săgeți, fiecare enunț aflat în coloana din stânga cu răspunsul corespunzător aflat în coloana din dreapta. **4,5 puncte**

Se consideră punctele coliniare A, B, C, în această ordine, cu $AB = 1{,}5$ cm și $AC = 3{,}5$ cm. Dacă d_1, d_2 și d_3 sunt perpendiculare pe dreapta AC în punctele A, B, respectiv C, atunci:

a) $d(B, d_1) = ...$	1) 3,5 cm;
b) $d(C, d_1) = ...$	2) 1,5 cm;
c) $d(C, d_2) = ...$	3) 5 cm;
	4) 2 cm.

3. Completează spațiul punctat cu răspunsul corect. **1,5 puncte**

Distanța de la un punct A la o dreaptă d este egală cu ... .

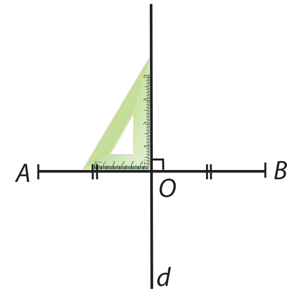
Din oficiu: 1 punct

V.3.4. MEDIATOAREA UNUI SEGMENT. CONSTRUCȚIA MEDIATOAREI UNUI SEGMENT. SIMETRIA FAȚĂ DE O DREAPTĂ

Observăm și descoperim cunoștințe noi

1. În figura alăturată este desenat un segment AB și am notat cu O mijlocul acestuia, adică $O \in AB$ și $OA = OB$.

Construim, cu ajutorul echerului, perpendiculara în punctul O pe dreapta suport a segmentului AB și notăm cu d dreapta obținută.

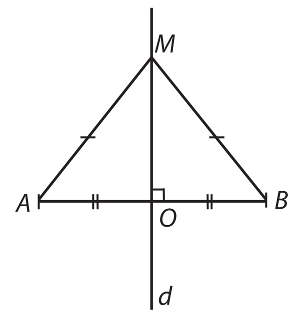


Dreapta d are proprietățile: $O \in d$ și $d \perp AB$. În acest caz, spunem că dreapta d este mediatoarea segmentului AB.

Considerăm pe dreapta d (mediatoarea segmentului AB) un punct M. Dacă măsurăm cu o riglă gradată segmentele MA și MB, vom constata că acestea au aceeași lungime (sunt congruente), adică $MA = MB$.

Spunem că punctul M este egal depărtat de capetele segmentului AB.

Altfel spus, punctele de pe mediatoarea unui segment sunt „egal depărtate de capetele segmentului". Acest rezultat reprezintă o teoremă pe care o vom folosi în problemele care urmează.



Reciproca acestei teoreme se poate enunța astfel: „orice punct din plan care este egal depărtat de capetele unui segment se află pe mediatoarea acestuia".

Cu alte cuvinte avem:

a) dacă un punct se află pe mediatoarea unui segment atunci el este egal depărtat de capetele segmentului.

b) dacă un punct din plan este egal depărtat de capetele unui segment, atunci acel punct se află pe mediatoarea segmentului respectiv.

Cele două rezultate pot fi enunțate și sub forma: „Un punct se află pe mediatoarea unui segment dacă și numai dacă este egal depărtat de capetele acestuia".

Construcția mediatoarei unui segment cu rigla negradată și compasul

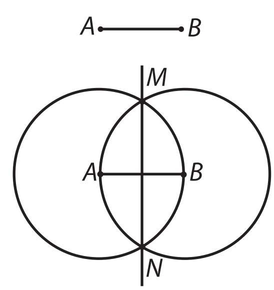
Fie AB un segment dat. Pentru a construi mediatoarea segmentului AB, parcurgem următorii pași:

– cu o deschidere a compasului egală cu lungimea segmentului AB desenăm două cercuri: unul cu centrul în punctul A și altul cu centrul în punctul B;

– cercul cu centrul în punctul A și raza AB se intersectează cu cercul cu centrul în punctul B și raza BA în punctele M și N;

– desenăm dreapta determinată de intersecțiile celor două cercuri, adică dreapta MN;

– dreapta MN este mediatoarea segmentului AB.



Observație: Punctele M și N sunt egal depărtate de capetele segmentului AB, deoarece AM și AN sunt raze ale cercului cu centrul în punctul A și raza AB, iar BM și BN sunt raze ale cercului cu centrul în punctul B și aceeași rază AB.

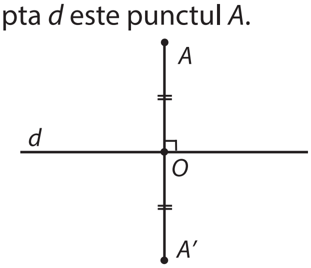
2. Fie un punct A și o dreaptă d. Simetricul punctului A față de dreapta d se definește astfel:

– dacă punctul A nu se află pe dreapta d ($A \notin d$), simetricul lui A față de dreapta d este punctul A' pentru care dreapta d este mediatoarea segmentului AA';

– dacă punctul A se află pe dreapta d, simetricul punctului A față de dreapta d este punctul A.

Observație:

Pentru a construi simetricul punctului A față de dreapta d, notat cu A', în cazul în care $A \notin d$, punem în evidență piciorul perpendicularei din A pe dreapta d, îl notăm cu O și apoi găsim punctul A', astfel încât d să fie mediatoarea segmentului AA' ($O \in AA'$ și $AO = OA'$).



În acest caz se mai spune că punctele A și A' sunt simetrice față de dreapta d.

Două puncte A și A' sunt simetrice față de o dreaptă d dacă dreapta d este mediatoarea segmentului determinat de cele două puncte.

Reține!

- **Mediatoarea** unui segment este dreapta care trece prin mijlocul segmentului și este perpendiculară pe acesta.
- **Teoremă.** Orice punct de pe mediatoarea unui segment este egal depărtat de capetele acestuia.
Reciproca teoremei. Orice punct din plan, egal depărtat de capetele unui segment, se află pe mediatoarea segmentului.
- Un punct A' este **simetricul unui punct** A față de o dreaptă d, dacă dreapta d este mediatoarea segmentului AA'. **Punctele A și A' sunt simetrice față de dreapta d.**
- **Simetricul unui segment** față de o dreaptă este un segment cu aceeași lungime.
- **Simetricul unui unghi** față de o dreaptă este un unghi cu aceeași măsură.
- Mediatoarea unui segment este **axa de simetrie** a segmentului respectiv.
- Bisectoarea unui unghi este **axa de simetrie** a unghiului respectiv.

Aplicăm cunoștințele

Se consideră două puncte A și B, simetrice față de o dreaptă d. Dreapta AB intersectează dreapta d în punctul O, iar C este un punct oarecare al dreptei d.

a) Demonstrează că dacă $\sphericalangle BAC \equiv \sphericalangle ABC$, atunci $\sphericalangle ACO \equiv \sphericalangle BCO$.

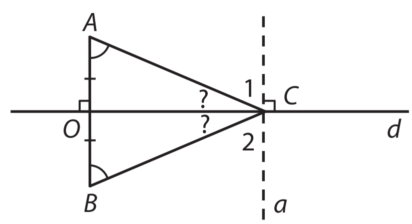
b) Demonstrează că dacă $\sphericalangle ACO \equiv \sphericalangle BCO$, atunci $\sphericalangle BAC \equiv \sphericalangle ABC$.

c) Scrie cele două propoziții enunțate la a) și b) sub forma unei singure propoziții matematice.

Rezolvare:

a) ***Ipoteza:***
$AB \cap d = \{O\}$;
$d \perp AB$, $C \in d$;
$\sphericalangle BAC \equiv \sphericalangle ABC$.

Concluzia:
$\sphericalangle ACO \equiv \sphericalangle BCO$.



Demonstrație:

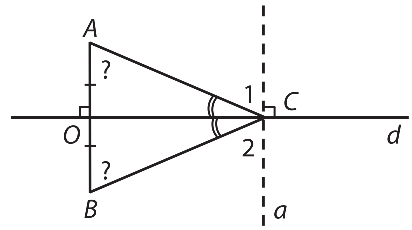
(*) Construim perpendiculara în punctul C pe dreapta d și o notăm cu a. Deci $a \perp d$.
Din $AB \perp d$ (ipoteză) și $a \perp d$ (construcție) rezultă că $AB \parallel a$. Notăm cu 1 și 2 unghiurile formate de dreapta a cu dreptele AC, respectiv BC.
Din $AB \parallel a$ rezultă: (1) $\sphericalangle BAC \equiv \sphericalangle 1$ (alterne interne pentru $AB \parallel a$ și secanta AC);
(2) $\sphericalangle ABC \equiv \sphericalangle 2$ (alterne interne pentru $AB \parallel a$ și secanta BC).

Din (1), (2) și faptul că $\sphericalangle BAC \equiv \sphericalangle ABC$ rezultă că $\sphericalangle 1 \equiv \sphericalangle 2$ (3).

Calculăm $\sphericalangle ACO = 90° - \sphericalangle 1 \overset{(3)}{=} 90° - \sphericalangle 2 = \sphericalangle BCO$, adică $\sphericalangle ACO \equiv \sphericalangle BCO$.

b) ***Ipoteza:***
$AB \cap d = \{O\}$;
$AO = BO$;
$d \perp AB$, $C \in d$;
$\sphericalangle ACO \equiv \sphericalangle BCO$.

Concluzia:
$\sphericalangle BAC \equiv \sphericalangle ABC$.



Demonstrație:

Prima parte a demonstrației coincide cu demonstrația de la punctul a) notată (*).

Calculăm $\sphericalangle BAC \overset{(1)}{=} \sphericalangle 1 = 90° - \sphericalangle ACO \overset{(\text{ipoteză})}{=} 90° - \sphericalangle BCO = \sphericalangle 2 \overset{(2)}{=} \sphericalangle ABC$, adică $\sphericalangle BAC \equiv \sphericalangle ABC$.

c) Se consideră două puncte A și B simetrice față de o dreaptă d. Dreapta AB intersectează dreapta d în punctul O, iar C este un punct oarecare al dreptei d. Unghiurile BAC și ABC sunt congruente dacă și numai dacă unghiurile ACO și BCO sunt congruente.

Exersează, fixează și aprofundează cunoștințele

1. Construiește un unghi XOY cu măsura de 60°. Pe semidreapta OX fixează un punct M, astfel încât $OM = 3$ cm, iar pe semidreapta OY fixează un punct N, astfel încât $ON = 5$ cm.

a) Construiește mediatoarea segmentului OM și notează-o cu d_1. Construiește mediatoarea segmentului ON și notează-o cu d_2.

b) Notează cu P punctul de intersecție a dreptelor d_1 și d_2. Scrie proprietățile punctului P.

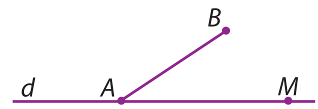
2. Se consideră o dreaptă d și două puncte distincte A și B exterioare dreptei d, situate de aceeași parte a dreptei d.

a) Construiește simetricul punctului A față de dreapta d și notează-l cu A'.

b) Construiește segmentul BC, astfel încât dreapta d să fie mediatoarea segmentului BC.

c) Precizează poziția dreptelor AA' și BC. Cum sunt segmentele AB și $A'C$ față de dreapta d?

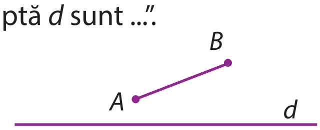
3. În figura alăturată se dă o dreaptă d și un segment AB, cu $A \in d$.



a) Construiește simetricul segmentului AB față de dreapta d și notează cu B' simetricul punctului B față de dreapta d.

b) Măsoară $\sphericalangle BAM$ și $\sphericalangle B'AM$, compară măsurile obținute și completează spațiul punctat, astfel încât să obții o afirmație adevărată: „Două unghiuri simetrice față de o dreaptă d sunt ...".

4. În figura alăturată se dă o dreaptă d și un segment AB, $A \notin d$, $B \notin d$.



a) Notează cu A' și B' simetricele punctelor A și B față de dreapta d.

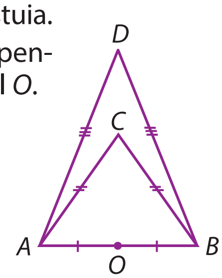
b) Măsoară lungimile segmentelor AB și $A'B'$, compară-le și completează propoziția: „Două segmente simetrice față de o dreaptă d sunt ...".

5. Construiește un segment AB cu lungimea de 3 cm și notează cu O mijlocul acestuia. Construiește perpendiculara în punctul O pe dreapta AB și fixează punctul C pe perpendiculară, astfel încât $CO = 1$ cm. Notează cu D simetricul punctului C față de punctul O.

a) Calculează lungimea segmentului CD.

b) Demonstrează că punctele A și B sunt simetrice față de dreapta CD.

c) Demonstrează că segmentele BC și AD sunt congruente.



6. Observă figura alăturată. Se știe că punctul O este mijlocul segmentului AB și că $AC \equiv BC$, respectiv $AD \equiv BD$. Demonstrează că punctele D, C, O sunt coliniare.

AUTOEVALUARE

1. Dacă apreciezi că afirmația este adevărată, încercuiește litera A. În caz contrar, încercuiește litera F. **3 puncte**

a) Axa de simetrie a unui segment este mediatoarea segmentului respectiv. **A F**

b) Punctele de pe mediatoarea unui segment au proprietatea că sunt egal depărtate de capetele segmentului. **A F**

c) Simetricul unui punct M față de o dreaptă d este un punct M' cu proprietatea că dreapta d conține mijlocul segmentului MM'. **A F**

2. Unește, prin săgeți, fiecare enunț aflat în coloana din stânga cu răspunsul corespunzător aflat în coloana din dreapta. Se consideră figura alăturată. Se știe că A' este simetricul punctului A față de dreapta d, că unghiul format de dreptele BB' și d este un unghi drept și că segmentele BQ și $B'Q$ sunt congruente: **4,5 puncte**

a) Piciorul perpendicularei din punctul A pe dreapta d este ...

b) Distanța de la punctul B la dreapta d este ...

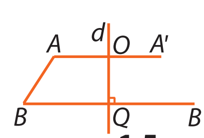
c) Simetricul segmentului AB față de dreapta d este ...

1) A';

2) BQ;

3) O;

4) $A'B'$.



3. Completează spațiile punctate cu răspunsurile corecte. **1,5 puncte**

Mediatoarea unui segment este ... perpendiculară pe segment, care trece prin ... acesteia.

Din oficiu: 1 punct

Exerciții și probleme recapitulative

1. Fie un unghi AOB cu măsura de 50°. Se consideră un punct M, astfel încât $OM \perp OA$, și un punct N, astfel încât $ON \perp OB$. Calculează măsurile unghiurilor AON, BOM și MON dacă:

a) semidreptele OM, ON și OA se află în același semiplan determinat de dreapta OB;

b) semidreptele OM și OA se află în același semiplan determinat de dreapta OB, iar semidreptele ON și OM se află în semiplane diferite determinate de dreapta OB;

c) semidreptele ON și OA se află în același semiplan determinat de dreapta OB, iar semidreptele OM și ON se află în semiplane diferite determinate de dreapta OB.

2. **a)** Realizează un desen, știind că semidreptele OA, OB, OC și OD formează unghiurile congruente AOB și COD, iar $\sphericalangle AOD + \sphericalangle BOC = 180°$.

b) Demonstrează că semidreptele OA și OB sunt perpendiculare.

c) Demonstrează că semidreptele OC și OD sunt perpendiculare.

3. Se consideră un unghi BAC cu măsura de 150°. Calculează măsurile unghiurilor MAN și BAN dacă $MA \perp AB$, $NA \perp AC$ și:

a) M și N sunt puncte interioare unghiului BAC; **b)** $M \in \text{Int}(\sphericalangle BAC)$, iar $N \notin \text{Int}(\sphericalangle BAC)$.

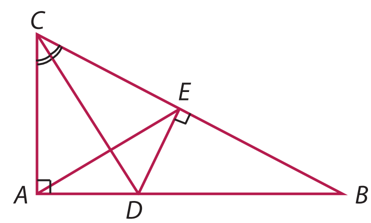
4. **a)** Construiește o dreaptă d și un punct A exterior dreptei d.

b) Construiește simetricul punctului A față de dreapta d și notează-l cu A';

c) Dacă $AA' \cap d = \{O\}$ și $AO = 2{,}5$ cm, calculează lungimea segmentului AA';

d) Dacă $AA' \cap d = \{O\}$ și $AA' = 8$ cm, calculează lungimea segmentului OA'.

5. În figura alăturată dreptele AB și AC sunt perpendiculare, CD este bisectoarea unghiului ACB și d(D, BC) = DE. Folosind rezultatele obținute în problema precedentă arată că punctul D se află pe mediatoarea segmentului AE.



6. Se consideră o dreaptă d și două puncte M și N de aceeași parte a dreptei d, astfel încât dreptele MN și d să nu fie nici perpendiculare, nici paralele.

a) Reprezintă simetricele punctelor M și N față de dreapta d și notează-le cu M' și N'.

b) Demonstrează că $MM' \parallel NN'$.

c) Demonstrează că dreptele MN, d și $M'N'$ sunt drepte concurente.

7. Se consideră punctele A, B, C, D, E, F și O dispuse astfel încât semidreapta OB este bisectoarea unghiului AOC, semidreapta OC este bisectoarea unghiului AOD, semidreapta OD este bisectoarea unghiului COE și semidreapta OE este bisectoarea unghiului COF. Semidreptele OA și OF sunt semidrepte opuse.

a) Realizează un desen care să ilustreze datele problemei.

b) Calculează măsurile unghiurilor: AOB, COD, BOD, COE, EOF și DOF.

c) Demonstrează că dreptele OB și OE sunt perpendiculare.

8. Se consideră un unghi alungit AOE. În același semiplan determinat de dreapta OE se construiesc unghiurile adiacente AOB, BOC, COD și DOE ale căror măsuri verifică șirul de produse egale: $\sphericalangle AOB = 3 \cdot \sphericalangle BOC = 2 \cdot \sphericalangle COD = 6 \cdot \sphericalangle DOE$.

a) Calculează măsurile unghiurilor din figura obținută.

b) Demonstrează că $AO \perp OB$. **c)** Demonstrează că $OB \perp OE$.

9. Demonstrează că bisectoarele unghiurilor formate de două drepte concurente sunt perpendiculare.

10. Pe o dreaptă a se consideră punctele M, N, P, Q în această ordine, astfel încât $MN = PQ$.

a) Construiește mediatoarea segmentului NP, noteaz-o cu d și $a \cap d = \{O\}$.

b) Demonstrează că d este și mediatoarea segmentului MQ.

11. **a)** Construiește axa de simetrie a unui unghi cu măsura de 80°. Ce observi?

b) Construiește un pătrat cu lungimea laturii de 3 cm și axele de simetrie ale acestuia. Câte axe de simetrie are pătratul?

EVALUARE

Timp de lucru: 50 de minute.

Subiectul I. Dacă apreciezi că afirmația este adevărată, completează căsuța alăturată cu litera A. În caz contrar, completează cu litera F.

(5p) **1.** Mediatoarea unui segment este dreapta care conține mijlocul segmentului și este perpendiculară pe acesta. ☐

(5p) **2.** Două puncte A și A' sunt simetrice față de o dreaptă d, dacă dreapta d este mediatoarea segmentului AA'. ☐

(5p) **3.** Distanța de la un punct A, exterior unei drepte d, la acea dreaptă este lungimea segmentului determinat de punctul A și piciorul perpendicularei din punctul A pe dreapta d. ☐

(5p) **4.** Dacă două drepte concurente a și b formează unghiuri cu măsurile de $x + 17°$ și $4x + 13°$, atunci $x = 30°$. ☐

Subiectul II. Unește, prin săgeți, fiecare cifră corespunzătoare enunțurilor din coloana **A** cu litera care indică răspunsul corect, aflat în coloana **B**.

Se consideră un unghi drept XAY. Pe semidreptele AX și AY se iau punctele B, respectiv C, astfel încât $AB = AC$. Se notează cu O mijlocul segmentului BC și cu D simetricul punctului A față de punctul O. Punctele M și N sunt mijloacele segmentelor AB, respectiv BD. Dacă $OA = OC$, atunci:

	A	B
(5p)	**1.** AD este mediatoarea segmentului ...	**a)** BC;
(5p)	**2.** OM este mediatoarea segmentului ...	**b)** OC;
(5p)	**3.** BC este mediatoarea segmentului ...	**c)** BD;
(5p)	**4.** ON este mediatoarea segmentului ...	**d)** AB;
		e) AD.

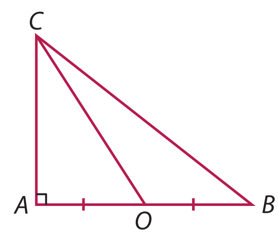
Subiectul III. Alege litera care indică singura variantă corectă.

(5p) **1.** Se consideră un punct A situat la distanța de 2,8 cm față de o dreaptă d. Se notează cu A' simetricul punctului A față de dreapta d. Distanța de la punctul A' la dreapta d este egală cu:

A. 1,4 cm; **B.** 4,2 cm; **C.** 2,8 cm; **D.** 5,6 cm.

(5p) **2.** În figura alăturată punctul O este mijlocul segmentului AB și $\sphericalangle CAB$ este unghi drept. Distanța de la punctul C la dreapta OB este:

A. CO; **B.** CA;
C. AO; **D.** CB.



(5p) **3.** Dacă $DE \perp EF$, atunci $\sphericalangle EFD$ este unghi:

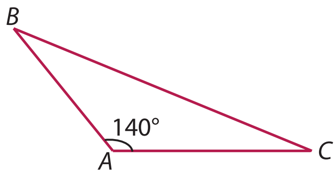
A. alungit; **B.** drept;
C. ascuțit; **D.** obtuz.

(5p) **4.** Dacă O este mijlocul segmentului MN și $PO \perp MN$, atunci PO este:

A. bisectoarea unghiului MOP; **B.** oblică față de MN;
C. bisectoarea unghiului NOP; **D.** mediatoarea segmentului MN.

La subiectul IV scrie rezolvarea completă.

Subiectul IV. În figura alăturată se știe că $\sphericalangle BAC = 140°$.



(10p) **a)** Construiește perpendiculara din punctul B pe dreapta AC și notează cu B' piciorul perpendicularei. Precizează care este d(B, AC).

(10p) **b)** Notează cu C' simetricul punctului C față de dreapta AB și cu O intersecția dreptelor AB și CC'. Precizează care este d(C', AB).

(10p) **c)** Dacă $CC' = 3,2$ cm, calculează d(C, AB).

Se acordă 10 puncte din oficiu. Nota se obține împărțind punctajul final la 10.

Subiectul	I.1	I.2	I.3	I.4	II.1	II.2	II.3	II.4	III.1	III.2	III.3	III.4	IV.a	IV.b	IV.c
Punctajul															
Nota															

V.4. CERCUL

V.4.1. Cerc. Elementele unui cerc

Rezolvăm, observăm și descoperim cunoștințe noi

1. În figura 1, punctele *A*, *B*, *C*, *D*, *E* și *F* sunt situate la distanța de 2,5 cm de punctul *O*.

a) Realizează în caietul tău o figură asemănătoare și completează desenul cu încă trei puncte *M*, *N*, *P* situate la distanța de 2,5 cm de punctul *O*.

b) Mai găsești și alte puncte situate la distanța de 2,5 cm de punctul *O*?

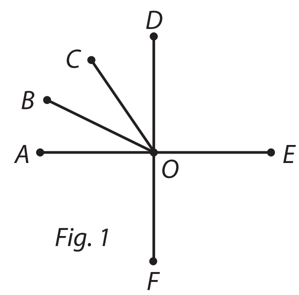


Fig. 1

Rezolvare: Analizând cu atenție figura, putem constata că există oricât de multe puncte situate la distanța de 2,5 cm de punctul *O*. Spunem că mulțimea tuturor punctelor din plan situate la distanța de 2,5 cm de punctul *O* formează cercul de centru *O* și rază 2,5 cm.

Oricare dintre segmentele *OA*, *OB*, *OC*, *OD*, *OE* din figură este rază a cercului.

Dacă notăm cu *r* raza cercului de centru *O* ce poți spune despre segmentele *OM*, *ON* și *OP* desenate de tine? Dar despre punctele *A*, *B*, *C*, *D*, *E*, *F*, respectiv *M*, *N*, *P*?

Iuliana, o fetiță foarte conștiincioasă, afirmă că $OM = ON = OP = r$, iar punctele se află pe cercul cu centrul în punctul *O*. Are dreptate?

Cercul se desenează cu ajutorul compasului. La un compas deosebim vârful compasului (ac) și vârful port-mină (figura 2).

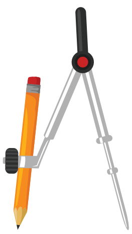


Fig. 2

Construcția unui cerc cu ajutorul compasului

Dorim să construim un cerc cu centrul într-un punct *O* și raza de 1,5 cm. Pentru aceasta procedăm astfel:

- fixăm un punct pe care îl notăm cu *O*;
- folosind rigla gradată, construim un segment *OA* cu lungimea de 1,5 cm (figura 3.a);
- fixăm vârful compasului în punctul *O* și vârful port-mină în punctul *A* și, astfel, între vârfurile compasului avem distanța de 1,5 cm (figura 3.b);
- ținem fix vârful compasului în punctul *O* și rotim compasul până ajungem în poziția din care am plecat (figura 3.c).

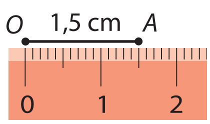


Fig. 3.a

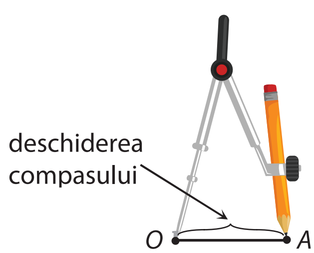


Fig. 3.b

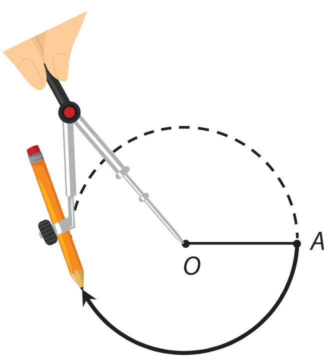


Fig. 3.c

Observații:

- Deschiderea compasului coincide cu lungimea razei cercului. Ca urmare orice punct *M* am lua pe cerc, obținem $OM = OA = r = 1,5$ cm (unde *r* este raza cercului).
- Prin rază înțelegem atât segmentul care unește centrul cercului cu un punct de pe cerc, cât și lungimea acestui segment.

Elementele unui cerc

Pentru a determina un cerc sunt suficiente două elemente: centrul cercului (punctul O) și raza cercului (r). Notăm $\mathscr{C}(O, r)$ și citim cercul de centrul O și rază r.

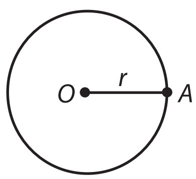


Fig. 4.a

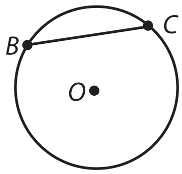


Fig. 4.b

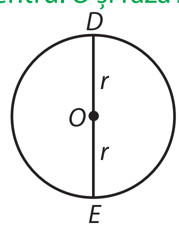


Fig. 4.c

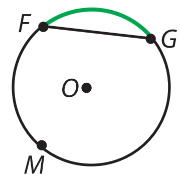


Fig. 4.d

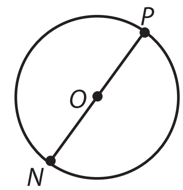


Fig. 4.e

- În figura 4.a observăm centrul cercului – punctul O și raza cercului – segmentul OA.
- În figura 4.b, segmentul BC este determinat de două puncte de pe cerc și se numește coardă.
- Dacă coarda trece prin centrul cercului, atunci ea se numește diametru. Lungimea unui diametru este egală cu $2r$. În figura 4.c, coarda DE conține punctul O, DE este diametru, iar punctele D și E sunt simetrice față de centrul cercului. Punctele D și E se numesc puncte diametral opuse.
- În figura 4.d, coarda FG determină pe cerc două arce, arcul mic notat $\overset{\frown}{FG}$ și arcul mare notat $\overset{\frown}{FMG}$.

Observație: Când ne referim la un arc mic, folosim pentru scriere doar două litere. Pentru a ne referi la un arc mare, vom folosi încă un punct al arcului, diferit de extremitățile acestuia.

- În figura 4.e, diametrul PN determină pe cerc două arce cu aceeași măsură, numite semicercuri.
- Mulțimea tuturor punctelor din plan care sunt situate față de punctul O la o distanță mai mică decât raza formează interiorul cercului și se notează Int $\mathscr{C}(O, r)$ (figura 5.a).
- Mulțimea tuturor punctelor din plan care sunt situate față de punctul O la o distanță mai mare decât raza formează exteriorul cercului și se notează Ext $\mathscr{C}(O, r)$ (figura 5.b).
- Mulțimea punctelor interioare cercului de centru O și rază OA reunită cu mulțimea punctelor cercului formează discul de centru O și rază OA (figura 5.c).

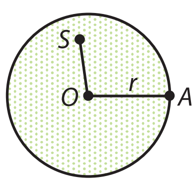


Fig. 5.a

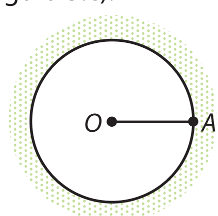


Fig. 5.b

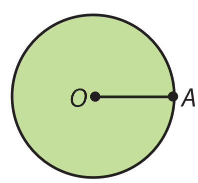


Fig. 5.c

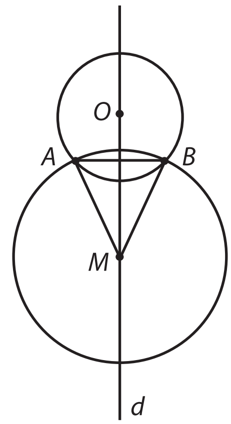
Reține!

- Fiind dat un punct O și un număr pozitiv r, se numește **cerc** de centru O și rază r mulțimea tuturor punctelor din plan situate la distanța r față de punctul O. Notăm $\mathscr{C}(O, r)$.
- Prin **raza cercului** se poate înțelege distanța de la centrul cercului la un punct de pe cerc sau segmentul care unește centrul cercului cu un punct de pe cerc.
- Segmentul care are ca extremități două puncte de pe cerc se numește **coardă**.
- Coarda care trece prin centrul cercului se numește **diametru**. Lungimea unui diametru este $2r$.
- Extremitățile (capetele) diametrului se numesc puncte diametral opuse.
- Porțiunea de cerc cuprinsă între două puncte distincte de pe cerc se numește **arc de cerc**. Dacă cele două puncte sunt diametral opuse, arcul de cerc devine **semicerc**.
- Un **punct** oarecare al planului poate avea următoarea poziție:
  - **interior cercului** dacă distanța de la centrul cercului la punct este mai mică decât raza;
  - **aparține cercului** dacă distanța de la centrul cercului la punct este egală cu raza;
  - **exterior cercului** dacă distanța de la centrul cercului la punct este mai mare decât raza.
- Mulțimea punctelor interioare reunită cu mulțimea punctelor cercului de centru O și rază r formează **discul** de centru O și rază r.

Aplicăm cunoştinţele

Câte cercuri trec prin două puncte distincte *A* şi *B*?

Rezolvare: În figura alăturată este reprezentat un cerc de centru *O* şi rază 1,5 cm. Punctele *A* şi *B* aparţin cercului şi *d* este mediatoarea segmentului *AB*. Considerăm un punct oarecare, notat cu *M*, pe dreapta *d*. Cum *M* se află pe mediatoarea segmentului *AB*, rezultă că punctul *M* este egal depărtat de capetele segmentului, adică *MA* = *MB* şi cercul de centru *M* şi rază *MA* trece şi prin punctul *B*. Deci am găsit două cercuri care trec prin punctele *A* şi *B*, $\mathscr{C}_1(O, r = OA)$ şi $\mathscr{C}_2(M, r = AM)$. Asemănător putem arăta că prin punctele *A* şi *B* trec şi alte cercuri ale căror centre se află pe mediatoarea segmentului *AB*. Cum mediatoarea segmentului *AB* conţine o infinitate de puncte, toate egal depărtate de *A* şi *B*, rezultă că *există o infinitate de cercuri care trec prin punctele A şi B, centrele acestor cercuri aflându-se pe mediatoarea segmentului AB.*



Exersează, fixează şi aprofundează cunoştinţele

1. **a)** Scrie definiţia cercului.

b) Desenează un cerc de centru *O* cu raza de 1,5 cm şi pune în evidenţă: raza *OA*, coarda *BC* şi diametrul *DE*.

2. **Activitate în perechi.** Folosind compasul, construiţi:

a) un cerc $\mathscr{C}(O, r)$ cu $r = 2$ cm; **b)** un cerc $\mathscr{C}(O, r)$ cu diametrul de 3 cm.

3. Calculează, în centimetri, raza unui cerc cu diametrul egal cu:

a) 48 mm; **b)** 6 cm; **c)** 0,08 m; **d)** 0,94 dm.

4. Calculează, în centimetri, diametrul unui cerc cu raza de:

a) 1,8 dm; **b)** 0,7 m; **c)** 56 mm; **d)** 10 cm.

5. Desenează un cerc de centru *O*, raza de 2 cm şi punctele *A*, *B*, *C*, *D*, *E*, *F*, astfel încât *OA* = 1,5 cm, *OB* = 2,5 cm, *OC* = 0,2 dm, *OD* = 10 mm, *OE* = 20 mm şi *OF* = 0,03 m. Completează spaţiile punctate pentru a obţine propoziţii adevărate:

a) Punctele interioare cercului sunt ... .

b) Punctele exterioare cercului sunt ... .

c) Punctele care se află pe cerc sunt ... .

d) Punctele care aparţin discului de centru *O* şi raza de 2 cm sunt ... .

6. Desenează un punct *M* şi trei cercuri care trec prin punctul *M*. Câte astfel de cercuri poţi desena?

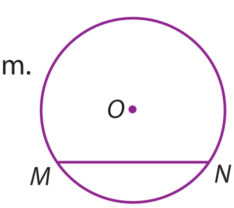
7. Punctele distincte *M* şi *N* aparţin unui cerc. Se notează cu *P* şi *Q* mijloacele arcelor determinate de punctele *M* şi *N*. Demonstrează că punctele *P* şi *Q* sunt puncte diametral opuse.

8. În figura alăturată, punctele *M* şi *N* aparţin cercului de centru *O* şi raza de 1,5 cm.

a) Notează cu *P* mijlocul coardei *MN* şi cu *Q* intersecţia dreptei *OP* cu cercul.

b) Numeşte arcele de cerc formate.

c) Ce poţi spune despre coardele *QM* şi *QN*? Justifică, folosind proprietatea punctelor de pe mediatoarea unui segment.



9. Fie *M* un punct în interiorul unui cerc. Construieşte o coardă care să aibă ca mijloc punctul *M*. Cum procedezi?

Indicaţie: Foloseşte un echer şi aplică proprietatea punctelor de pe mediatoarea unui segment.

AUTOEVALUARE

10 min

1. Încercuiește litera corespunzătoare răspunsului corect. **3 puncte**

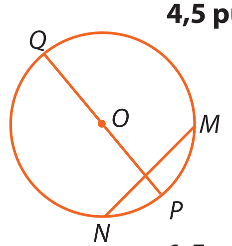
a) Un punct A aparține unui cerc de centru O și raza de 3 cm dacă și numai dacă:

A. $OA < 3$ cm; **B.** $OA = 3$ dm; **C.** $OA = 30$ mm; **D.** $OA > 3$ mm.

b) Prin două puncte distincte A și B trec/trece:

A. 2 cercuri; **B.** 3 cercuri; **C.** un cerc; **D.** o infinitate de cercuri.

2. Unește, prin săgeți, fiecare enunț aflat în coloana din stânga cu răspunsul corespunzător aflat în coloana din dreapta. **4,5 puncte**



În figura alăturată, punctele M, N, P, Q se află pe cercul cu centrul în punctul O. Dacă punctele P, O și Q sunt coliniare, atunci:

a) segmentul MN este ...	**1)** rază;
b) segmentul OQ este ...	**2)** coardă;
c) dreapta PQ este ...	**3)** arc de cerc;
	4) axă de simetrie.

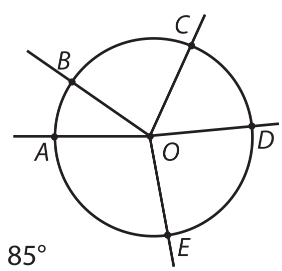
3. Completează caseta cu răspunsul corect. **1,5 puncte**

Două puncte A și B sunt puncte diametral opuse ale unui cerc cu centrul O, iar M este un punct oarecare al cercului. Dacă $AB = 6$ cm, atunci OM este egal cu ☐.

Din oficiu: 1 punct

V.4.2. UNGHI LA CENTRU. MĂSURI

Rezolvăm, observăm și descoperim cunoștințe noi



1. În figura alăturată, unghiurile AOB, BOC, COD, DOE, EOA sunt unghiuri care au vârful comun în punctul O, care este centrul unui cerc. Aceste unghiuri se numesc unghiuri la centru.

a) Folosind raportorul, măsoară unghiurile AOB, BOC, COD, DOE, EOA.

b) Arată că unghiurile AOB, BOC, COD, DOE, EOA sunt unghiuri în jurul punctului O.

***Rezolvare*:**

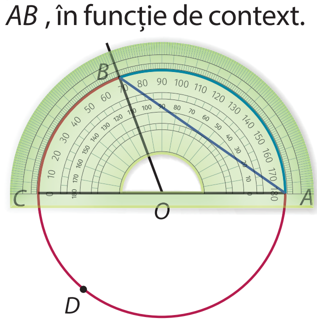
a) Măsurând unghiurile obținem: $\sphericalangle AOB = 35°$, $\sphericalangle BOC = 80°$, $\sphericalangle COD = 60°$, $\sphericalangle DOE = 85°$ și $\sphericalangle AOE = 100°$.

b) Cele cinci unghiuri au vârful comun (punctul O), interioarele disjuncte și suma măsurilor lor este egală cu 360°. Deci $\sphericalangle AOB$, $\sphericalangle BOC$, $\sphericalangle COD$, $\sphericalangle DOE$, $\sphericalangle EOA$ sunt unghiuri în jurul punctului O.

Observații:

• Când am măsurat unghiurile, de fapt am măsurat arcele de cerc cuprinse între laturile unghiurilor. Astfel, $\sphericalangle AOB = \overset{\frown}{AB}$, $\sphericalangle BOC = \overset{\frown}{BC}$, $\sphericalangle COD = \overset{\frown}{CD}$, $\sphericalangle DOE = \overset{\frown}{DE}$, $\sphericalangle EOA = \overset{\frown}{EA}$.

• Prin notația $\overset{\frown}{AB}$ putem înțelege arcul de cerc $\overset{\frown}{AB}$ sau măsura arcului de cerc $\overset{\frown}{AB}$, în funcție de context.



2. Privește figura alăturată.

a) Folosind gradațiile raportorului, scrie măsurile unghiurilor AOB, BOC și AOC.

b) Ținând cont că atunci când măsurăm un unghi măsurăm de fapt arcul de cerc cuprins între laturile unghiului, precizează măsura arcului mic $\overset{\frown}{AB}$, determinat de coarda AB.

c) Observând că măsura semicercului $\overset{\frown}{ABC}$ este suma măsurilor arcelor mici $\overset{\frown}{AB}$ și $\overset{\frown}{BC}$, calculează măsura semicercului.
d) Deoarece cercul este reuniunea a două semicercuri, precizează măsura cercului cu centrul în punctul *O*.
e) Observând că măsura arcului mare $\overset{\frown}{ACB}$ determinat de coarda *AB* este diferența dintre măsura cercului și măsura arcului mic $\overset{\frown}{AB}$, calculează măsura acestuia.
Rezolvare:
a) $\sphericalangle AOB = 110°$, $\sphericalangle BOC = 70°$ și $\sphericalangle AOC = 180°$;
b) $\overset{\frown}{AB} = \sphericalangle AOB = 110°$;
c) Deoarece $\overset{\frown}{AB} = \sphericalangle AOB = 110°$ și $\overset{\frown}{BC} = \sphericalangle BOC = 70°$, rezultă că $\overset{\frown}{ABC} = \overset{\frown}{AB} + \overset{\frown}{BC} = 110° + 70° = 180°$;
d) Cercul fiind reuniunea semicercurilor $\overset{\frown}{ABC}$ și $\overset{\frown}{ADC}$, rezultă că măsura cercului este egală cu suma măsurilor lor, adică $\overset{\frown}{ABC} + \overset{\frown}{ADC} = 180° + 180° = 360°$;
e) $\overset{\frown}{ACB} = 360° - \overset{\frown}{AB} = 360° - 110° = 250°$.

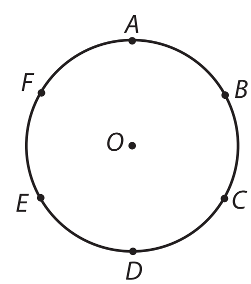
Observație: Rezolvarea de mai sus ne permite să stabilim cum calculăm măsura în grade a unui arc mic de cerc, a unui semicerc, a cercului și a unui arc mare de cerc.

Reține!

- Un unghi care are vârful în centrul unui cerc se numește **unghi la centru**.
- Dacă *A* și *B* sunt două puncte ale unui cerc de centru *O*, atunci:
  - **măsura arcului mic de cerc** $\overset{\frown}{AB}$ este egală cu măsura unghiului la centru *AOB*;
  - **măsura arcului mare de cerc** $\overset{\frown}{AB}$ este egală cu diferența dintre 360° și măsura unghiului la centru *AOB*.
  - **măsura unui cerc** este egală cu 360°, iar **măsura unui semicerc** este egală cu 180°.
- Două arce de cerc care au aceeași măsură sunt **arce congruente**.

Aplicăm cunoștințele

Se consideră șase puncte *A*, *B*, *C*, *D*, *E*, *F* care împart un cerc cu centrul în punctul *O* în șase arce congruente.
a) Calculează măsura arcelor de cerc formate.
b) Calculează măsurile unghiurilor *AOB* și *BOD*.
c) Demonstrează că punctele *A*, *O* și *D* sunt coliniare.



Rezolvare:
a) Cele șase arce de cerc $\overset{\frown}{AB}$, $\overset{\frown}{BC}$, $\overset{\frown}{CD}$, $\overset{\frown}{DE}$, $\overset{\frown}{EF}$ și $\overset{\frown}{FA}$ fiind congruente, au măsurile egale.
Cum măsura cercului este egală cu 360°, rezultă că:
$\overset{\frown}{AB} = \overset{\frown}{BC} = \overset{\frown}{CD} = \overset{\frown}{DE} = \overset{\frown}{EF} = \overset{\frown}{FA} = 360° : 6 = 60°$.
b) Unghiurile *AOB* și *BOD* sunt unghiuri la centru, ca urmare, $\sphericalangle AOB = \overset{\frown}{AB} = 60°$ și $\sphericalangle BOD = \overset{\frown}{BC} + \overset{\frown}{CD}$, adică $\sphericalangle BOD = 60° + 60° = 120°$.
c) Ținând cont de rezolvarea de la b) rezultă că $\sphericalangle AOB + \sphericalangle BOD = 60° + 120° = 180°$, adică $\sphericalangle AOD = 180°$. De aici rezultă că semidreptele *OA* și *OD* sunt semidrepte opuse, adică *A*, *O* și *D* sunt puncte coliniare.

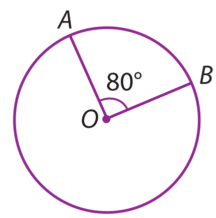
Exersează, fixează și aprofundează cunoștințele

1. Desenează un cerc $\mathscr{C}(O, r)$ cu $r = 2$ cm și alege un punct A pe cerc. Fixează pe cerc punctele B, C și D, astfel încât: **a)** $\overset{\frown}{AB} = 45°$; **b)** $\sphericalangle BOC = 90°$; **c)** D diametral opus lui A.

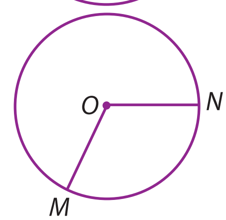
2. Folosind datele din problema anterioară, calculează măsurile următoarelor unghiuri și arce de cerc:
a) $\sphericalangle AOB$; **b)** $\overset{\frown}{BC}$; **c)** $\sphericalangle COD$; **d)** $\overset{\frown}{ABC}$; **e)** $\sphericalangle AOC$; **f)** $\overset{\frown}{AD}$.

3. Desenează un cerc cu centrul într-un punct O și raza de 3 cm.
a) În cerc consideră coardele AB și CD, astfel încât $AB = CD = 3$ cm. Determină, folosind raportorul, măsurile arcelor AB și CD. Ce observi?
b) În cerc consideră arcele MN și PQ, astfel încât $\overset{\frown}{MN} = \overset{\frown}{PQ} = 60°$. Determină, folosind rigla gradată, lungimile coardelor MN și PQ. Ce observi?

4. Într-un cerc de centru O și rază 4 cm se consideră o coardă MN de 4 cm și se notează cu PQ diametrul perpendicular pe coarda MN. Dacă $PQ \cap MN = \{R\}$ și punctul Q se află pe arcul mic $\overset{\frown}{MN}$, determină, prin măsurare, măsurile segmentelor MR și RN și ale arcelor $\overset{\frown}{MQ}$ și $\overset{\frown}{QN}$.



5. În figura alăturată, unghiul AOB are măsura de 80°.
a) Determină măsura arcului mic $\overset{\frown}{AB}$ și a arcului mare $\overset{\frown}{AB}$.
b) Dacă A' este simetricul punctului A față de centrul cercului, calculează măsura unghiului AOA'.



6. În figura alăturată, măsura arcului mic $\overset{\frown}{MN}$ este egală cu 130°.
a) Determină măsura unghiului la centru MON și a arcului mare $\overset{\frown}{MN}$.
b) Dacă P este un punct pe cerc, astfel încât MP este axă de simetrie a cercului, calculează măsura unghiului NOP.

7. Punctele A și B se află pe un cerc $\mathscr{C}(O, r)$. Știind că măsura arcului $\overset{\frown}{AB}$ reprezintă 60% din măsura unui semicerc, calculează măsura unghiului AOB.

8. Pe un cerc cu centrul în punctul O se consideră două puncte A și C. Se notează cu B, respectiv cu D, simetricele punctelor A și C față de punctul O. Dacă măsura arcului $\overset{\frown}{AC}$ este egală cu 50°, calculează:
a) măsurile arcelor: $\overset{\frown}{AB}$, $\overset{\frown}{BD}$, $\overset{\frown}{AD}$, $\overset{\frown}{BC}$, $\overset{\frown}{CD}$; **b)** măsurile unghiurilor: AOC, AOD, BOD, BOC.

AUTOEVALUARE

10 min

1. Dacă apreciezi că afirmația este adevărată, încercuiește litera A. În caz contrar, încercuiește litera F. **4,5 puncte**

a) Dacă A și B sunt două puncte ale unui cerc de centru O și $\overset{\frown}{AB}$ este arcul mare de cerc determinat de punctele A și B, atunci $\sphericalangle AOB = \overset{\frown}{AB}$. **A F**
b) Laturile oricărui unghi la centru intersectează cercul. **A F**
c) Dacă un unghi are vârful în interiorul unui cerc, atunci el este întotdeauna unghi la centru. **A F**

2. Încercuiește litera corespunzătoare răspunsului corect. **3 puncte**

a) Notează cu O centrul unui cerc, cu A un punct interior cercului, cu B un punct pe cerc și cu C un punct exterior cercului. Desenează patru unghiuri cu vârfurile A, B, C și O. Unghi la centru este:
A. $\sphericalangle C$; **B.** $\sphericalangle A$; **C.** $\sphericalangle B$; **D.** $\sphericalangle O$.

b) Pe cercul cu centrul în punctul O se consideră două puncte A și B, astfel încât măsura arcului mare $\overset{\frown}{AB}$ să fie egală cu 120% din măsura unui semicerc. Măsura unghiului la centru AOB este egală cu:
A. 60°; **B.** 216°; **C.** 144°; **D.** 108°.

3. Completează spațiul punctat cu răspunsul corect. **1,5 puncte**

Punctele A și B sunt puncte ale unui cerc de centru O și $\sphericalangle AOB = 100°$. Punctele C și D se află pe arcul mic $\overset{\frown}{AB}$. Dacă $\overset{\frown}{AC} = 45°$ și $\overset{\frown}{BD} = 30°$, atunci $\overset{\frown}{CD} = ...°$.

Din oficiu: 1 punct

V.4.3. Pozițiile unei drepte față de un cerc. Pozițiile relative a două cercuri

Ne amintim

Pozițiile unui punct față de un cerc:

- Un punct A este interior unui cerc dacă distanța de la punct la centrul cercului este mai mică decât raza cercului ($OA < r$).
- Un punct B aparține unui cerc dacă distanța de la punct la centrul cercului este egală cu raza cercului ($OB = r$).
- Un punct C este exterior unui cerc dacă distanța de la punct la centrul cercului este mai mare decât raza cercului ($OC > r$).

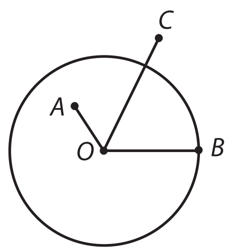


Fig. 1

Rezolvăm, observăm și descoperim cunoștințe noi

1. Figurile următoare arată că o dreaptă poate avea:
– un punct comun cu cercul (figura 2.a);
– două puncte comune cu cercul (figura 2.b);
– niciun punct comun cu cercul (figura 2.c).

a) Măsoară distanțele de la centrul cercului la dreaptă în fiecare caz și compară distanțele cu raza cercului.

b) Demonstrează că o dreaptă nu poate avea trei puncte comune cu un cerc.

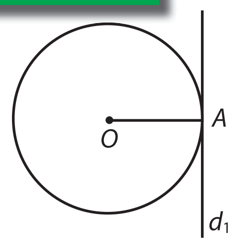


Fig. 2.a

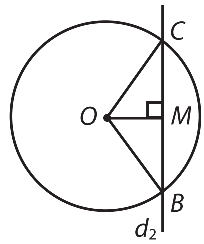


Fig. 2.b

Rezolvare:

a) În prima figură, distanța de la centrul cercului la dreapta d_1 este OA și $OA = r$. În acest caz spunem că dreapta d_1 este tangentă cercului.

În a doua figură, distanța de la centrul cercului la dreapta d_2 este OM și $OM < r$. În acest caz spunem că dreapta d_2 este secantă cercului.

În a treia figură, distanța de la centrul cercului la dreapta d_3 este ON și $ON > r$. În acest caz spunem că dreapta d_3 este exterioară cercului.

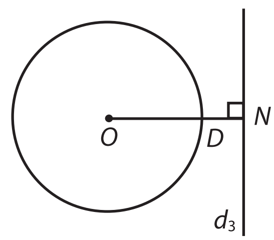


Fig. 2.c

b) Presupunem că dreapta d poate avea trei puncte A, B, C comune cu un cerc de centru O și rază r.

- Din faptul că punctele A și B sunt pe cerc, rezultă că $OA = r$ și $OB = r$, adică $OA = OB$.
- Din $OA = OB$ (punctul O este egal depărtat de capetele segmentului AB) rezultă că punctul O se află pe mediatoarea segmentului AB, notată cu d_1, și $d_1 \perp AB$, respectiv $d_1 \perp d$ (1) (două puncte distincte determină o dreaptă).
- Din faptul că punctele B și C sunt pe cerc, rezultă că $OB = r$ și $OC = r$, adică $OB = OC$.
- Din $OB = OC$ (punctul O este egal depărtat de capetele segmentului BC) rezultă că punctul O se află pe mediatoarea segmentului BC, notată cu d_2, și $d_2 \perp BC$, respectiv $d_2 \perp d$ (2).

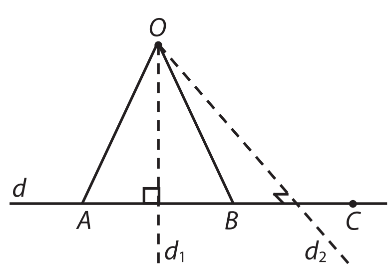


Fig. 3

- Cum segmentele AB și BC nu au același mijloc, rezultă că dreptele d_1 și d_2 sunt distincte (3).
- Din (1), (2) și (3) rezultă că din punctul O există două perpendiculare d_1 și d_2 pe dreapta d, ceea ce nu este posibil. Ca urmare, o dreaptă nu poate avea trei puncte comune cu un cerc.

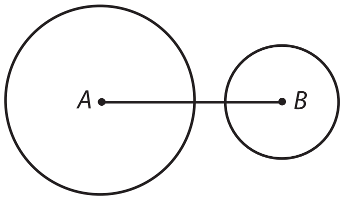
2. Construiește un segment AB, apoi construiește cercul cu centrul în punctul A și raza $r_1 = 1{,}5$ cm și cercul cu centrul în punctul B și raza $r_2 = 1$ cm, știind că:

a) $AB = 3{,}5$ cm; **b)** $AB = 2{,}5$ cm; **c)** $AB = 0{,}5$ cm;
d) $AB = 2$ cm; **e)** $AB = 0{,}3$ cm; **f)** $AB = 0$ cm.

Precizează, în fiecare caz, câte puncte comune au cele două cercuri și compară lungimea segmentului AB cu suma, respectiv cu diferența lungimilor razelor cercurilor.

Rezolvare:

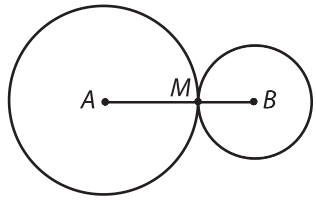
a)



$AB > r_1 + r_2$

nu au puncte comune

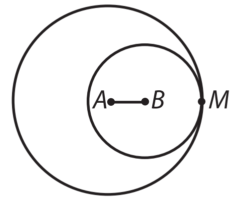
b)



$AB = r_1 + r_2$

au un punct comun

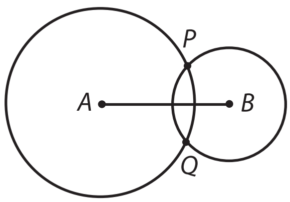
c)



$AB = r_1 - r_2$

au un punct comun

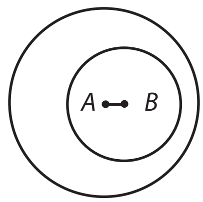
d)



$r_1 - r_2 < AB < r_1 + r_2$

au două puncte comune

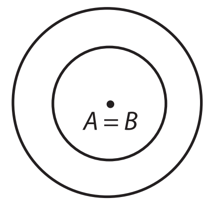
e)



$AB < r_1 - r_2$

nu au puncte comune

f)



$AB = 0$

nu au puncte comune,
au același centru

Observație:

În funcție de poziția în care se află cele două cercuri, ele se numesc:
- cercuri exterioare (figura a));
- cercuri tangente exterioare (figura b));
- cercuri tangente interioare (figura c));
- cercuri secante (figura d));
- cercuri interioare (figura e));
- cercuri concentrice (figura f)).

Reține!

- **O dreaptă poate avea, față de un cerc, una dintre următoarele poziții:**
  a) *tangentă cercului;* **b)** *secantă cercului;* **c)** *exterioară cercului.*
- **Două cercuri pot avea una dintre următoarele poziții:**
  a) *exterioare;* **b)** *tangente exterioare;* **c)** *tangente interioare;*
  d) *secante;* **e)** *interioare;* **f)** *concentrice.*

Aplicăm cunoștințele

Pe o dreaptă d se consideră punctele A_1, A_2, A_3, în această ordine, astfel încât $A_1A_2 = 1$ cm și $A_2A_3 = 2$ cm.

a) Construiește $\mathscr{C}(A_1, 3 \text{ cm})$ și $\mathscr{C}(A_2, 2 \text{ cm})$ și stabilește poziția celor două cercuri.

b) Construiește $\mathscr{C}(A_1, 1 \text{ cm})$ și $\mathscr{C}(A_3, 2 \text{ cm})$ și stabilește poziția celor două cercuri.

c) Construiește $\mathscr{C}(A_1, 3 \text{ cm})$ și $\mathscr{C}(A_3, 2 \text{ cm})$ și stabilește poziția celor două cercuri.

Rezolvare:

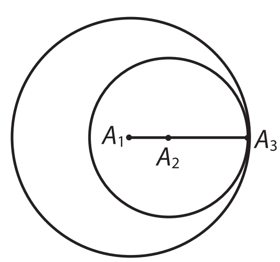
Reprezentăm punctele pe dreaptă și cercurile.

a) Construim cercul de centru A_1 și rază A_1A_3 și cercul de centru A_2 și rază A_2A_3.

Distanța dintre centrele lor este egală cu diferența razelor:

$$A_1A_2 = 1 \text{ cm}, A_1A_3 - A_2A_3 = 3 - 2 = 1 \text{ cm}.$$

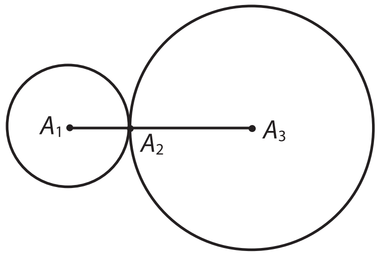
Rezultă că cele două cercuri sunt tangente interioare.



b) Construim cercul de centru A_1 și rază A_1A_2 și cercul de centru A_3 și rază A_3A_2.
Distanța dintre centrele lor este egală cu suma razelor:

$$A_1A_3 = 3 \text{ cm}, A_1A_2 + A_3A_2 = 1 + 2 = 3 \text{ cm}.$$

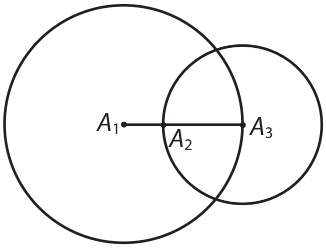
Rezultă că cele două cercuri sunt tangente exterioare.



c) Construim cercul de centru A_1 și rază A_1A_3 și cercul de centru A_3 și rază A_3A_2.
Distanța dintre centrele lor este mai mare decât diferența razelor și mai mică decât suma razelor:

$$A_1A_3 = 3 \text{ cm}, A_1A_3 - A_3A_2 = 3 - 2 = 1 \text{ cm},$$
$$A_1A_3 + A_3A_2 = 3 + 2 = 5 \text{ cm}.$$

Rezultă că cele două cercuri sunt secante.



Exersează, fixează și aprofundează cunoștințele

1. Definește și exemplifică prin câte un desen fiecare dintre noțiunile:
a) dreaptă secantă cercului; **b)** dreaptă tangentă cercului; **c)** dreaptă exterioară cercului.

2. Definește și exemplifică prin câte un desen fiecare dintre noțiunile:
a) cercuri concentrice; **b)** cercuri interioare; **c)** cercuri exterioare;
d) cercuri secante; **e)** cercuri tangente interioare; **f)** cercuri tangente exterioare.

3. Desenează două cercuri $\mathscr{C}_1(O_1, r_1)$ și $\mathscr{C}_2(O_2, r_2)$ și precizează pozițiile celor două cercuri în situațiile:
a) $r_1 = 2$ cm, $r_2 = 1$ cm și $O_1O_2 = 5$ cm; **b)** $r_1 = 2$ cm, $r_2 = 1{,}5$ cm și $O_1O_2 = 0$ cm;
c) $r_1 = 1{,}5$ cm, $r_2 = 2$ cm și $O_1O_2 = 3{,}5$ cm; **d)** $r_1 = 3$ cm, $r_2 = 2$ cm și $O_1O_2 = 1$ cm;
e) $r_1 = 4$ cm, $r_2 = 2$ cm și $O_1O_2 = 1$ cm; **f)** $r_1 = 2{,}5$ cm, $r_2 = 1{,}5$ cm și $O_1O_2 = 3$ cm.

4. Determină poziția dreptei a față de un cerc $\mathscr{C}(O, 3 \text{ cm})$, în fiecare dintre următoarele situații:
a) $d(O, a) = 0{,}04$ m; **b)** $d(O, a) = 30$ mm; **c)** $d(O, a) = 0{,}2$ dm.

5. Se consideră un cerc cu centrul în punctul O și raza egală cu $3x - 1$ cm.
a) Se știe că distanța de la centrul cercului la o dreaptă a este de 5 cm. Determină numărul natural x pentru care dreapta a este tangentă cercului.
b) Se știe că distanța de la centrul cercului la o dreaptă b este de 11 cm. Determină cea mai mare valoare, număr natural, pe care poate să o ia x, astfel încât dreapta b să fie exterioară cercului.

6. Activitate pe echipe. Împărțiți în șase echipe, elevii clasei vor rezolva câte un subpunct al problemei.
Fie cercurile $\mathscr{C}_1(O_1, r_1)$ și $\mathscr{C}_2(O_2, r_2)$, cu $r_1 = 7$ cm, $r_2 = 4$ cm și $O_1O_2 = 2x + 1$ cm. Determinați valorile numărului $x \in \mathbb{N}^*$, pentru care cercurile sunt:
a) tangente interioare; **b)** tangente exterioare; **c)** secante;
d) exterioare; **e)** concentrice; **f)** interioare.

7. Activitate în perechi
a) Desenați un cerc cu centrul într-un punct O și raza de 2 cm.
b) Fixați un punct A pe cerc și construiți tangenta MA la cerc.
c) Cu ajutorul raportorului măsurați unghiul MAO. Ce observați?
d) Folosind observația de la punctul c), găsiți o metodă practică de a construi tangenta într-un punct al unui cerc. Explicați colegilor metoda găsită.

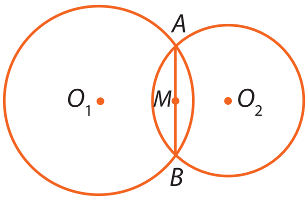
8. Se consideră o dreaptă d și patru puncte M, N, P, Q pe dreapta d, astfel încât $MN = 2$ cm, $NQ = 6$ cm și $MP = 4$ cm.
a) Analizează toate posibilitățile ce pot să apară.
b) Precizează, pentru fiecare caz, pozițiile pe care le au cercurile de diametre MP și PQ.

AUTOEVALUARE

10 min

1. Dacă apreciezi că afirmația este adevărată, încercuiește litera A. În caz contrar, încercuiește litera F. **4,5 puncte**

În figura alăturată punctele A și B aparțin cercurilor cu centrele în punctele O_1 și O_2. Dacă punctul M este mijlocul segmentului AB, atunci:



a) punctul O_1 este situat pe mediatoarea segmentului AB; **A** **F**

b) punctul O_2 nu este situat pe mediatoarea segmentului AB; **A** **F**

c) punctele O_1, M, O_2 sunt coliniare. **A** **F**

2. Încercuiește litera corespunzătoare răspunsului corect. **3 puncte**

a) Două cercuri au suma razelor egală cu 4 cm și diferența razelor egală cu 1 cm. Se notează cu d distanța dintre centrele celor două cercuri. Cele două cercuri sunt secante dacă:

A. $d > 4$ cm; B. $d = 4$ cm; C. 1 cm $< d < 4$ cm; D. $d \leq 1$ cm.

b) Se consideră un cerc cu centrul într-un punct O și raza de 3 cm. Se notează cu d distanța de la centrul cercului la o dreaptă a. Dreapta a este tangentă cercului dacă:

A. $d > 3$ cm; B. $d = 0,3$ dm; C. 0 cm $< d < 3$ cm; D. $d = 0$ cm.

3. Completează caseta cu răspunsul corect. **1,5 puncte**

Se consideră un cerc de centru O, cu raza de 4 cm. Dacă distanța de la centrul cercului la o dreaptă d este egală cu 20 mm, atunci dreapta d este ______ cercului.

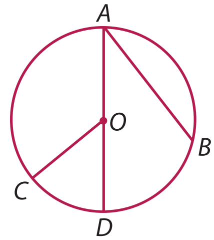
Din oficiu: 1 punct

Exerciții și probleme recapitulative

1. Se consideră un cerc de centru O și raza de 3 cm și un punct A. Stabilește poziția punctului A față de cerc dacă:

a) $OA = 29$ mm; b) $OA = 0,31$ dm; c) $OA = 0,03$ m.

2. În figura alăturată punctul O este centrul cercului, iar punctele A, B, C și D sunt situate pe cerc. Precizează:



a) un arc mic; b) un arc mare;

c) un unghi la centru; d) un semicerc;

e) o coardă care nu e diametru; f) un diametru.

3. Calculează:

a) diametrul unui cerc cu raza de 3 cm;

b) raza unui cerc cu diametrul de 8 cm;

c) raza unui cerc pe care sunt situate două puncte diametral opuse la distanța de 0,48 dm unul față de celălalt.

4. Desenează un cerc cu centrul într-un punct O și raza de 2 cm. Fixează pe cerc punctele A, B, C și D, în această ordine, astfel încât să fie îndeplinite simultan condițiile:

a) $\sphericalangle AOB = 30°$; b) $\sphericalangle AOC = 90°$; c) $\sphericalangle BOD = 150°$.

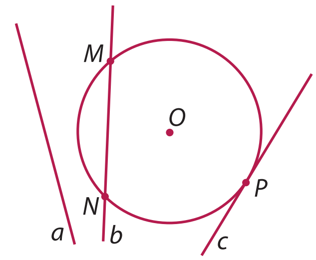
Calculează măsurile arcelor $\overset{\frown}{BC}$, $\overset{\frown}{CD}$, $\overset{\frown}{AD}$ și demonstrează că A și D sunt puncte diametral opuse.

5. Punctele A, B și C sunt situate pe $\mathcal{C}(O, r)$, astfel încât punctele A, O, B să fie coliniare și dreapta CO să fie perpendiculară pe dreapta AB.

a) Calculează măsura arcului mic $\overset{\frown}{BC}$.

b) Precizează dacă coardele AC și BC sunt congruente. Justifică afirmația făcută.

6. Precizează poziția dreptelor *a*, *b* și *c* față de cercul din figura alăturată, precum și numărul punctelor comune dreptei și cercului, în fiecare dintre cazuri.



7. Se consideră un segment *AB* cu lungimea de 4 cm și cercul cu centrul în punctul *A* și raza de 1,5 cm. Calculează raza cercului cu centrul în punctul *B*, tangent cercului $\mathcal{C}(A, 1{,}5 \text{ cm})$.

8. Desenează trei cercuri tangente exterioare două câte două.

9. **a)** Desenează două cercuri concentrice cu centrul într-un punct *O* și razele egale cu 1,5 cm, respectiv 2,5 cm.

b) Fixează două puncte *A* și *B* pe cercul cu raza de 2,5 cm. Notează intersecțiile razelor *OA* și *OB* cu cercul de rază 1,5 cm cu *C*, respectiv cu *D*. Ce poți spune despre măsura arcelor *AB* și *CD*? Dar despre măsura unghiurilor *AOB* și *COD*?

10. Se consideră un segment *AB* cu lungimea de 3 cm și cercurile $\mathcal{C}_1(A, 3 \text{ cm})$ și $\mathcal{C}_2(B, 3 \text{ cm})$. Se notează cu *M* și *N* punctele de intersecție a celor două cercuri. Demonstrează că dreapta *MN* este mediatoarea segmentului *AB*.

11. Se consideră o dreaptă *d* și punctele *A*, *B*, *C*, *D* pe această dreaptă, în această ordine, astfel încât $AB = 1$ cm, $AC = 4$ cm și $AD = 5$ cm.

a) Construiește perpendicularele în punctele *B*, *C*, *D*, pe dreapta *d*, și notează-le cu d_1, d_2, respectiv d_3.

b) Construiește cercul cu diametrul *AC*.

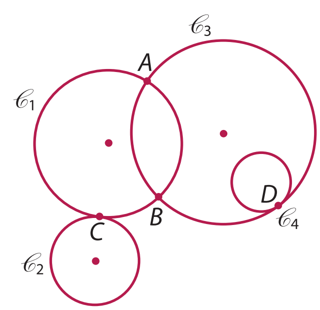
c) Scrie care sunt pozițiile dreptelor d_1, d_2 și d_3 față de cercul construit.

12. Pe un semicerc se iau punctele *A*, *B*, *C*, *D*, în această ordine, astfel încât *A* și *D* să fie extremitățile diametrului, iar măsurile arcelor $\overset{\frown}{AB}$, $\overset{\frown}{BC}$ și $\overset{\frown}{CD}$ să fie direct proporționale cu numerele 2, 3 și 5.

a) Calculează măsurile arcelor $\overset{\frown}{AB}$, $\overset{\frown}{BC}$ și $\overset{\frown}{CD}$.

b) Realizează un desen corespunzător datelor problemei, știind că $AD = 6$ cm.

13. În figura alăturată sunt reprezentate cercurile $\mathcal{C}_1$, $\mathcal{C}_2$, $\mathcal{C}_3$ și $\mathcal{C}_4$. Precizează poziția fiecăruia dintre cele patru cercuri în raport cu celelalte.



14. Activitate pe grupe. Construiți cercurile $\mathcal{C}_1(O_1, 3 \text{ cm})$, $\mathcal{C}_2(O_2, 2 \text{ cm})$ și precizați poziția lor în fiecare dintre următoarele cazuri:

a) $O_1O_2 = 4$ cm; **b)** $O_1O_2 = 5$ cm; **c)** $O_1O_2 = 1$ cm;
d) $O_1O_2 = 0$ cm; **e)** $O_1O_2 = 6$ cm; **f)** $O_1O_2 = 0{,}5$ cm.

15. Pe un cerc $\mathcal{C}(O, r)$ se consideră punctele *A*, *B* și *C*, astfel încât măsurile arcelor $\overset{\frown}{AB}$, $\overset{\frown}{BC}$ și $\overset{\frown}{CA}$ să fie invers proporționale cu numerele 6, 10 și 15.

a) Calculează măsurile arcelor $\overset{\frown}{AB}$, $\overset{\frown}{BC}$ și $\overset{\frown}{CA}$.

b) Pe arcul mic $\overset{\frown}{BC}$ se ia un punct *D*, astfel încât $\sphericalangle AOC = 4 \cdot \sphericalangle COD$. Demonstrează că unghiul *AOD* este unghi drept.

c) Calculează măsurile unghiurilor *BOD*, *BOC* și *AOC*.

16. Dacă punctele *A* și *B* sunt pe un cerc $\mathcal{C}(O, r)$ și măsura unghiului la centru *AOB* este egală cu $37°43'$, calculează măsura arcului mare $\overset{\frown}{AB}$.

EVALUARE

Timp de lucru: 50 de minute.

Subiectul I. Dacă apreciezi că afirmația este adevărată, completează căsuța alăturată cu litera A. În caz contrar, completează cu litera F.

(5p) **1.** Prin capetele unui segment trec o infinitate de cercuri. ☐

(5p) **2.** Măsura unui semicerc este egală cu 360°. ☐

(5p) **3.** Segmentul care unește centrul cercului cu un punct de pe cerc se numește coardă. ☐

(5p) **4.** Un punct este interior unui cerc dacă distanța de la centrul cercului la acel punct este mai mică decât raza. ☐

Subiectul II. Unește, prin săgeți, fiecare cifră corespunzătoare enunțurilor din coloana **A** cu litera care indică răspunsul corect, aflat în coloana **B**.

Se consideră un cerc $\mathcal{C}(O, r)$ și se notează cu d distanța de la centrul cercului la o dreaptă a.

	A	B
(5p)	**1.** Dacă $d < r$, atunci dreapta a ...	**a)** este interioară cercului;
(5p)	**2.** Dacă $d = r$, atunci dreapta a ...	**b)** este secantă cercului;
(5p)	**3.** Dacă $d > r$, atunci dreapta a ...	**c)** este tangentă cercului;
(5p)	**4.** Dacă $d = 0$, atunci dreapta a ...	**d)** este exterioară cercului;
		e) conține centrul cercului.

Subiectul III. Alege litera care indică singura variantă corectă.

(5p) **1.** Dacă distanța dintre centrele a două cercuri este egală cu 1,5 cm, atunci cele două cercuri nu pot fi:

A. secante; **B.** tangente; **C.** interioare; **D.** concentrice.

(5p) **2.** Se consideră două cercuri $\mathcal{C}_1(O_1, 3 \text{ cm})$ și $\mathcal{C}_2(O_2, 4 \text{ cm})$. Dacă distanța dintre centrele celor două cercuri este $O_1O_2 = 5$ cm, atunci cele două cercuri sunt:

A. exterioare; **B.** interioare; **C.** secante; **D.** tangente interioare.

(5p) **3.** Două cercuri $\mathcal{C}_1(O_1, 2 \text{ cm})$ și $\mathcal{C}_2(O_2, 3 \text{ cm})$ sunt tangente exterioare. Distanța dintre centrele celor două cercuri este egală cu:

A. 1 cm; **B.** 5 cm; **C.** 2,5 cm; **D.** 3 cm.

(5p) **4.** Pe un cerc $\mathcal{C}(O, r)$ se iau punctele A și B, astfel încât măsura arcului mare $\overset{\frown}{AB}$ să fie egală cu 230°. Măsura unghiului AOB este egală cu:

A. 115°; **B.** 230°; **C.** 130°; **D.** 50°.

La subiectul IV scrie rezolvarea completă.

Subiectul IV. Se consideră un cerc de centru O și raza de 2 cm. Pe cerc se iau punctele A, B, C și D, în această ordine, astfel încât $\sphericalangle AOB = 90°$, $\overset{\frown}{BC} = 60°$ și $2 \cdot \overset{\frown}{AB} = 3 \cdot \overset{\frown}{AD}$. Calculează:

(10p) **a)** măsura arcului mic $\overset{\frown}{AD}$;

(10p) **b)** măsura arcului mare $\overset{\frown}{AC}$;

(10p) **c)** măsura unghiului la centru COD.

Se acordă 10 puncte din oficiu. Nota se obține împărțind punctajul final la 10.

Subiectul	I.1	I.2	I.3	I.4	II.1	II.2	II.3	II.4	III.1	III.2	III.3	III.4	IV.a	IV.b	IV.c
Punctajul															
Nota															

CAPITOLUL VI

TRIUNGHIUL

CUPRINS

VI.1. TRIUNGHIUL

VI.1.1. Triunghiul: definiție, elemente, clasificare. Perimetru

Rezolvăm, observăm și descoperim cunoștințe noi

1. Desenează trei puncte necoliniare și notează-le cu *A*, *B*, *C*. Pune în evidență dreptele *AB*, *BC* și *CA*. Ce s-a format?

***Rezolvare*:**

Desenăm cele trei puncte necoliniare *A*, *B* și *C* (figura 1). Trasăm dreptele *AB*, *BC* și *CA* (figura 2). Observăm că intersecțiile celor trei drepte au pus în evidență segmentele *AB*, *BC* și *CA* (figura 3).

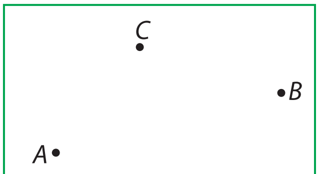


Fig. 1

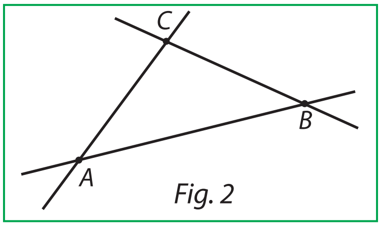


Fig. 2

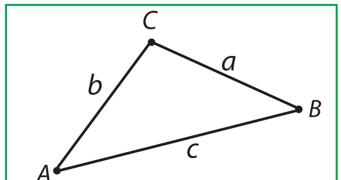


Fig. 3

▸ Cele trei puncte *A*, *B*, *C*, împreună cu mulțimea tuturor punctelor segmentelor *AB*, *BC* și *CA* formează **triunghiul** *ABC* (figura 3).

Am obținut astfel o mulțime de puncte din plan, adică o figură geometrică, care are trei laturi, trei vârfuri și trei unghiuri.

Triunghiul din figura 3 poate fi citit „*triunghiul ABC* sau *triunghiul BCA* sau *triunghiul CAB*".

Elementele triunghiului	Notăm	Citim
• vârfurile triunghiului	*A*, *B*, *C*	vârful *A*, vârful *B*, vârful *C*
• laturile triunghiului	*AB*, *BC*, *CA*	latura *AB*, latura *BC*, latura *CA*
• unghiurile triunghiului	$\sphericalangle A$, $\sphericalangle B$, $\sphericalangle C$ sau $\sphericalangle BAC$, $\sphericalangle ABC$, $\sphericalangle ACB$	unghiul *A*, unghiul *B*, unghiul *C* unghiul *BAC*, unghiul *ABC*, unghiul *ACB*

În triunghiul *ABC* (figura 3), spunem că latura *BC* se opune unghiului *A* și, respectiv, că unghiul *A* este unghiul opus laturii *BC*. Despre unghiurile *B* și *C* se spune că sunt unghiuri alăturate laturii *BC*.

▸ Un punct este interior unui triunghi dacă este interior fiecăruia dintre unghiurile triunghiului.

▸ Mulțimea tuturor punctelor interioare unui triunghi *MNP* formează **interiorul triunghiului** *MNP*, care se notează Int(ΔMNP).

În figura 4, punctele interioare triunghiului *MNP* sunt punctele *P*, *Q* și *R*.

▸ Un punct care nu se află pe laturile triunghiului și care nu este nici interior triunghiului se numește punct exterior triunghiului.

▸ Mulțimea tuturor punctelor exterioare unui triunghi *MNP* formează **exteriorul triunghiului** *MNP*, care se notează Ext(ΔMNP).

În figura 4, punctele exterioare triunghiului *MNP* sunt punctele *S*, *T* și *V*. Punctele *E* și *F* nu sunt interioare și nici exterioare triunghiul, ele se află pe laturile triunghiului *MNP*.

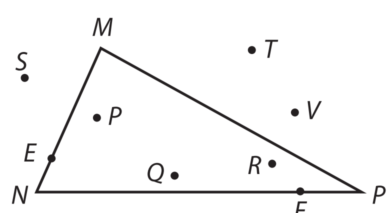


Fig. 4

▸ Pentru lungimile laturilor unui triunghi *ABC* se obișnuiește să se folosească următoarele notații: $AB = c$, $AC = b$ și $BC = a$ (figura 3). Cu aceste notații, **perimetrul** triunghiului (suma lungimilor tuturor laturilor triunghiului) se notează cu $\mathscr{P}$ și $\mathscr{P} = a + b + c$.

Semiperimetrul triunghiului se notează cu *p* și $p = \dfrac{\mathscr{P}}{2} = \dfrac{a+b+c}{2}$.

2. Un segment AB are lungimea de 4 cm. Pe segmentul AB se consideră două puncte M și N, astfel încât $AM = 3$ cm și $BN = 2,5$ cm. Arcul de cerc cu centrul în punctul A și raza AM intersectează arcul de cerc cu centrul în punctul B și raza BN în punctul C. Construiește figura geometrică corespunzătoare enunțului problemei.

Un segment DE are lungimea de 2,5 cm. Un arc de cerc cu centrul în punctul D și raza de 3 cm se intersectează cu un arc de cerc cu centrul în punctul E și raza de 3 cm, în punctul F. Construiește figura geometrică corespunzătoare enunțului problemei.

Un segment PQ are lungimea de 2,5 cm. Un arc de cerc cu centrul în punctul P și raza de 2,5 cm se intersectează cu un arc de cerc cu centrul în punctul Q și raza de 2,5 cm, în punctul R. Construiește figura geometrică corespunzătoare enunțului problemei.

***Rezolvare*:**

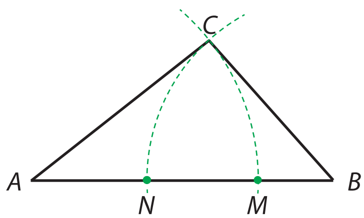


Fig. 5

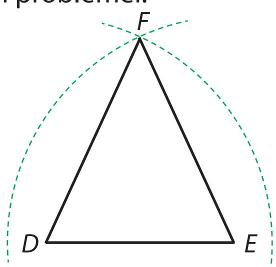


Fig. 6

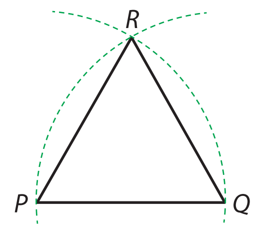


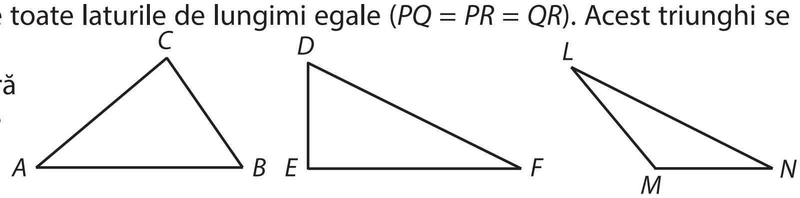
Fig. 7

▸ Triunghiul ABC din figura 5 are laturile de lungimi diferite două câte două. Acest triunghi se numește **triunghi scalen** (oarecare).

▸ Triunghiul DEF din figura 6 are două laturi de lungimi egale ($DF = EF$). Acest triunghi se numește **triunghi isoscel**, iar latura DE se numește bază.

▸ Triunghiul PQR din figura 7 are toate laturile de lungimi egale ($PQ = PR = QR$). Acest triunghi se numește **triunghi echilateral**.

3. Cu ajutorul unui raportor, măsoară unghiurile triunghiurilor din figurile alăturate. Ce observi?



***Rezolvare*:**

Măsurăm unghiurile triunghiului ABC și obținem: $\sphericalangle ABC = 55^\circ$, $\sphericalangle BCA = 85^\circ$ și $\sphericalangle CAB = 40^\circ$. Observăm că toate unghiurile sunt ascuțite (au măsurile mai mici decât 90°) și sunt diferite două câte două.

Măsurăm unghiurile triunghiului DEF și obținem: $\sphericalangle DEF = 90^\circ$, $\sphericalangle EFD = 30^\circ$ și $\sphericalangle FDE = 60^\circ$. Observăm că triunghiul DEF are un unghi drept.

Măsurăm unghiurile triunghiului LMN și obținem: $\sphericalangle LMN = 130^\circ$, $\sphericalangle MNL = 20^\circ$ și $\sphericalangle NLM = 30^\circ$. Observăm că triunghiul LMN are un unghi obtuz (cu măsura mai mare decât 90°).

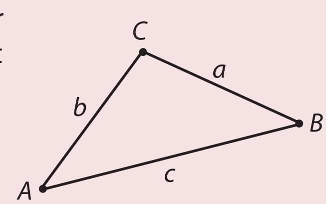
▸ Triunghiul ABC are toate unghiurile ascuțite și se numește **triunghi ascuțitunghic**.

▸ Triunghiul DEF are un unghi drept și se numește **triunghi dreptunghic**. Laturile DE și EF se numesc catete, iar latura DF se numește ipotenuză.

▸ Triunghiul LMN are un unghi obtuz și se numește **triunghi obtuzunghic**.

Reține!

- Fiind date trei puncte necoliniare A, B, C, se numește **triunghi** determinat de punctele A, B, C mulțimea formată din cele trei puncte, împreună cu mulțimea tuturor punctelor segmentelor AB, BC și CA și se notează ΔABC sau ΔBCA sau ΔCAB (literele pot fi așezate în ce ordine dorim).
- Elementele triunghiului ABC sunt:
  - vârfurile triunghiului (punctele A, B, C);
  - laturile triunghiului (segmentele AB, BC, CA);
  - unghiurile triunghiului (unghiurile ABC, BCA și CAB).



- Un punct este interior unui triunghi dacă este interior fiecărui unghi al acestui triunghi.
- Un punct este exterior unui triunghi dacă nu este interior și nu se află pe laturile acestuia.
- Suma lungimilor laturilor triunghiului ABC este perimetrul acestuia. Dacă $AB = c$, $BC = a$, $CA = b$, atunci $\mathscr{P} = a + b + c$ și $p = \frac{\mathscr{P}}{2} = \frac{a+b+c}{2}$ este semiperimetrul triunghiului ABC.
- **Clasificarea triunghiurilor**
  - După lungimile laturilor, un triunghi poate fi:
    - scalen (are laturile de lungimi diferite);
    - isoscel (are două laturi de lungimi egale);
    - echilateral (are toate laturile de aceeași lungime).
  - După măsurile unghiurilor, un triunghi poate fi:
    - ascuțitunghic (are toate unghiurile ascuțite);
    - dreptunghic (are un unghi drept);
    - obtuzunghic (are un unghi obtuz).

Aplicăm cunoștințele

Stabilește natura unui triunghi LMN știind că:

a) $\sphericalangle L = 120°$, $LM = LN = 5$ cm; **b)** $LM = MN = LN$;
c) $\sphericalangle L = 90°$, $LM = LN = 4$ cm; **d)** $\sphericalangle L = 45°$, $\sphericalangle M = 70°$, $\sphericalangle N = 65°$.

***Rezolvare*:**

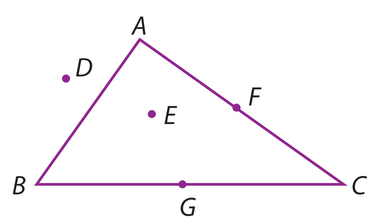
a) Triunghiul LMN are un unghi obtuz și două laturi congruente și, ca urmare, este triunghi obtuzunghic isoscel;
b) Toate laturile triunghiului sunt congruente, deci triunghiul este echilateral;
c) Triunghiul LMN este dreptunghic isoscel, deoarece un unghi drept și catetele congruente;
d) Triunghiul LMN este ascuțitunghic, deoarece are toate unghiurile ascuțite.

Exersează, fixează și aprofundează cunoștințele

1. Desenează trei puncte necoliniare A, B, C și triunghiul determinat de cele trei puncte.
a) Denumește vârfurile, laturile și unghiurile triunghiului.
b) Precizează latura opusă unghiului A, unghiul opus laturii AB și unghiurile alăturate laturii BC.

2. Se consideră patru puncte A, B, C, D, astfel încât oricare trei sunt necoliniare. Câte triunghiuri determină cele patru puncte? Denumește triunghiurile.

3. **Activitate în perechi.** Urmăriți figura alăturată și stabiliți valoarea de adevăr a propozițiilor:



a) $F \in \Delta ABC$; **b)** $E \in \text{Int}(\Delta ABC)$; **c)** $G \notin \Delta ABC$;
d) $D \in \text{Int}(\Delta ABC)$; **e)** $D \notin \text{Ext}(\Delta ABC)$; **f)** $E \in \text{Ext}(\Delta ABC)$.

4. Stabilește natura triunghiului ABC, în următoarele cazuri:
a) $AB = 5$ cm, $BC = 4$ cm, $AC = 6$ cm; **b)** $\sphericalangle B = 90°$, $AB = 4$ cm, $BC = 4$ cm;
c) $AB = AC = 8$ cm, $BC = 6$ cm; **d)** $\sphericalangle B = 120°$, $AB = BC = 5$ cm;
e) $AB = AC = BC = 6$ cm; **f)** $\sphericalangle B = 45°$, $\sphericalangle A = 65°$, $\sphericalangle C = 70°$.

5. Un triunghi dreptunghic MNP are ipotenuza MP. Precizează catetele triunghiului.

6. Precizează vârful și baza unui triunghi isoscel ABC, în fiecare dintre următoarele cazuri:
a) $AB = AC$; **b)** $AB = BC$; **c)** $AC = BC$.

7. Calculează perimetrul și semiperimetrul unui triunghi isoscel ABC, dacă:
a) $AB = AC = 8$ cm și $BC = 6$ cm; **b)** $AB = 4$ cm, $AC = 6$ cm. Câte soluții are problema? Justifică.

8. Adunând câte două lungimile laturilor unui triunghi se obțin rezultatele 34 cm, 50 cm și 36 cm. Calculează:
a) semiperimetrul triunghiului; **b)** lungimile laturilor triunghiului.

AUTOEVALUARE

1. Încercuiește litera corespunzătoare răspunsului corect. **3 puncte**

a) Un triunghi este scalen dacă are:

A. două laturi de lungimi egale; B. două laturi de lungimi diferite;
C. laturile de lungimi egale; D. laturile de lungimi diferite.

b) Dacă a, b, c reprezintă lungimile laturilor unui triunghi în care $2a = 3b = 5c$ și semiperimetrul triunghiului este egal cu 31 cm, atunci cea mai mare dintre laturile triunghiului are lungimea egală cu:

A. 12 cm; B. 40 cm; C. 30 cm; D. 20 cm.

2. Unește, prin săgeți, fiecare enunț aflat în coloana din stânga cu răspunsul corespunzător aflat în coloana din dreapta. **4,5 puncte**

Două cercuri $\mathscr{C}_1(O_1, r_1)$ și $\mathscr{C}_2(O_2, r_2)$ se intersectează în punctele A și B. Dacă punctul M reprezintă intersecția dreptei O_1O_2 cu dreapta AB, $r_1 < r_2$, $AB = r_1$, atunci:

a) triunghiul AO_1B este ... 1) dreptunghic;
b) triunghiul AMO_1 este ... 2) echilateral;
c) triunghiul AO_2B este ... 3) scalen;
4) isoscel, dar nu echilateral.

3. Completează caseta cu răspunsul corect. **1,5 puncte**

În triunghiul TVR, latura opusă unghiului R este $\boxed{}$.

Din oficiu: 1 punct

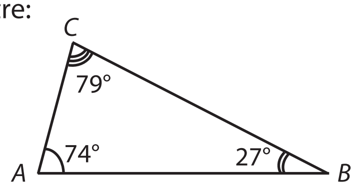
VI.1.2. SUMA MĂSURILOR UNGHIURILOR UNUI TRIUNGHI. UNGHI EXTERIOR UNUI TRIUNGHI. TEOREMA UNGHIULUI EXTERIOR

Rezolvăm, observăm și descoperim cunoștințe noi

1. Petre și Elena au construit, fiecare, câte un triunghi, au măsurat cu raportorul măsurile unghiurilor și le-au notat în desenele lor. Apoi, fiecare a calculat suma măsurilor unghiurilor.

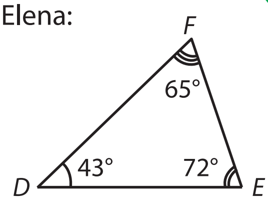
Ce observi?

Petre:



$\sphericalangle A + \sphericalangle B + \sphericalangle C = 180°$

Elena:

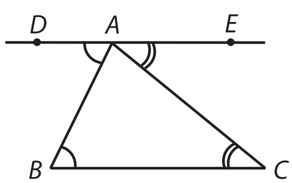


$\sphericalangle D + \sphericalangle E + \sphericalangle F = 180°$

Rezolvare:
Se observă că, în ambele cazuri, suma măsurilor tuturor unghiurilor este aceeași, adică 180°.

Teoremă: În orice triunghi, suma măsurilor unghiurilor este egală cu 180°.

Demonstrație:



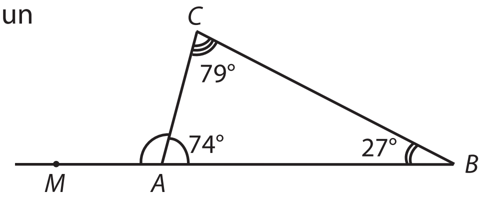
Construim triunghiul ABC și prin vârful A al triunghiului construim paralela la dreapta BC, pe care fixăm două puncte D și E, ca în figura alăturată.

Din $DE \parallel BC$ și secanta AB rezultă că $\sphericalangle ABC \equiv \sphericalangle DAB$ (1) (unghiuri alterne interne).

Din $DE \parallel BC$ și secanta AC rezultă că $\sphericalangle ACB \equiv \sphericalangle EAC$ (2) (unghiuri alterne interne).

Cum $\sphericalangle DAE$ este unghi alungit, rezultă că $\sphericalangle DAB + \sphericalangle BAC + \sphericalangle EAC = \sphericalangle DAE = 180°$ și, ținând cont de (1) și (2), obținem că $\sphericalangle ABC + \sphericalangle BAC + \sphericalangle ACB = 180°$.

2. Petre prelungește latura AB dincolo de punctul A și fixează un punct M pe semidreapta opusă semidreptei AB. El calculează măsura unghiului CAM și suma măsurilor unghiurilor B și C:
$\sphericalangle CAM = \sphericalangle MAB - \sphericalangle CAB = 180° - 74° = 106°$;
$\sphericalangle B + \sphericalangle C = 27° + 79° = 106°$. Ce observi?



Rezolvare:
Se observă că măsura unghiului CAM este egală cu suma măsurilor celor două unghiuri ale triunghiului ABC, neadiacente cu el.

În problema anterioară:

- unghiurile CAB și CAM sunt unghiuri adiacente, deoarece au vârful comun (punctul O), o latură comună (semidreapta AC) și interioarele disjuncte.
- unghiurile CAB și CAM sunt și suplementare, deoarece semidreptele AB și AM sunt semidrepte opuse.
- unghiul CAM, adiacent și suplementar cu unghiul A al triunghiului ABC, este unghi exterior al triunghiului ABC.
- Se pot obține șase unghiuri exterioare triunghiului ABC, două câte două congruente (ca unghiuri opuse la vârf).

Teorema unghiului exterior: Măsura unui unghi exterior unui triunghi este egală cu suma măsurilor unghiurilor interioare triunghiului, neadiacente cu el.

- Dacă notăm cu x, y, z măsurile unghiurilor exterioare triunghiului ABC, obținem:
$x = \sphericalangle A + \sphericalangle B$, $y = \sphericalangle B + \sphericalangle C$, $z = \sphericalangle C + \sphericalangle A$ și $2 \cdot (x + y + z) = 2 \cdot [(\sphericalangle A + \sphericalangle B) + (\sphericalangle B + \sphericalangle C) + (\sphericalangle C + \sphericalangle A)] =$
$= 2 \cdot (2 \cdot \sphericalangle A + 2 \cdot \sphericalangle B + 2 \cdot \sphericalangle C) = 4 \cdot (\sphericalangle A + \sphericalangle B + \sphericalangle C) = 4 \cdot 180° = 720°$.

Suma măsurilor unghiurilor exterioare oricărui triunghi este 720°.

Reține!

- **Suma măsurilor unghiurilor unui triunghi este egală cu 180°.**
- Unghiurile ascuțite ale unui triunghi dreptunghic isoscel au 45° fiecare.
- Unghiurile triunghiului echilateral, fiind congruente, au 60° fiecare.
- Unghiul adiacent și suplementar cu un unghi al unui triunghi se numește **unghi exterior triunghiului.**
- **Măsura unui unghi exterior al unui triunghi este egală cu suma măsurilor unghiurilor interioare neadiacente cu el.**
- Suma măsurilor unghiurilor exterioare ale unui triunghi este egală cu 720°.
- Măsura unui unghi exterior este mai mare decât măsura oricărui unghi interior neadiacent cu el.

Aplicăm cunoștințele

1. Calculează măsura celui de-al treilea unghi al unui triunghi ABC, știind că $\sphericalangle A = 47°$ și $\sphericalangle B = 43°$.
Rezolvare: Cum $\sphericalangle A + \sphericalangle B + \sphericalangle C = 180°$, rezultă că $47° + 43° + \sphericalangle C = 180°$ și obținem $\sphericalangle C = 90°$.

2. Calculează măsurile unghiurilor triunghiului ABC, știind că acestea sunt direct proporționale cu numerele 2, 3 și 5. Precizează natura triunghiului ABC.
Rezolvare: Notăm cu x, y și z măsurile unghiurilor triunghiului ABC și avem $x + y + z = 180°$ (suma măsurilor unghiurilor unui triunghi). Cum x, y și z sunt direct proporționale cu numerele 2, 3 și 5, obținem șirul de rapoarte egale: $\frac{x}{2} = \frac{y}{3} = \frac{z}{5} = \frac{x+y+z}{2+3+5} = \frac{180°}{10} = 18°$ (proprietatea șirului de rapoarte egale).

Din $\frac{x}{2} = 18°$ rezultă $x = 36°$. Din $\frac{y}{3} = 18°$ rezultă $y = 54°$. Din $\frac{z}{5} = 18°$ rezultă $z = 90°$. Deci măsurile unghiurilor triunghiului sunt egale cu: 36°, 54° și 90°.
Triunghiul este dreptunghic, deoarece unul dintre unghiurile triunghiului are măsura egală cu 90°.

Exersează, fixează și aprofundează cunoștințele

1. Verifică dacă următoarele măsuri de unghiuri pot fi măsurile unghiurilor unui triunghi.
a) 34°, 71° și 85°; **b)** 12°37′, 77°13′ și 90°10′; **c)** 24°, 67° și 89°.

2. Calculează măsura celui de-al treilea unghi al unui triunghi, cunoscând măsurile celorlalte două unghiuri:
a) $\sphericalangle A = 67°$ și $\sphericalangle B = 45°$; **b)** $\sphericalangle A = 85°17'$ și $\sphericalangle C = 29°47'$; **c)** $\sphericalangle B = \sphericalangle C = 75°$.

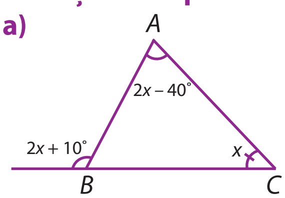
3. Într-un triunghi *ABC*, $\sphericalangle A = 54°$ și $\sphericalangle B = 48°$. Calculează măsurile unghiurilor exterioare triunghiului *ABC*.

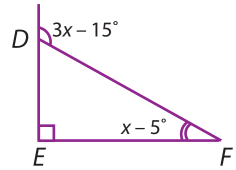
4. Măsurile a două dintre unghiurile exterioare unui triunghi sunt egale cu 110°, respectiv 130°. Calculează măsurile unghiurilor interioare triunghiului.

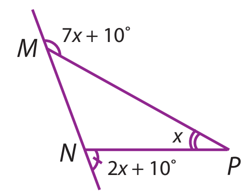
5. Calculează măsurile unghiurilor unui triunghi *ABC*, știind că $\sphericalangle ABC = 7x°$, $\sphericalangle BCA = 6x° - 10°$ și $\sphericalangle CAB = 5x° + 10°$.

6. Determină măsurile unghiurilor unui triunghi, știind că sunt:
a) direct proporționale cu numerele 5, 6 și 7; **b)** invers proporționale cu numerele 2, 3 și 6.

7. **Lucrați în echipe.** Determinați, valoarea lui *x* din fiecare figură:

a)


b)


c)


8. Determină măsurile unghiurilor unui triunghi, știind că un unghi exterior are măsura egală cu 110° și triunghiul are:
a) două unghiuri congruente; **b)** un unghi drept.

AUTOEVALUARE

10 min

1. Dacă apreciezi că afirmația este adevărată, încercuiește litera A. În caz contrar, încercuiește litera F. **3 puncte**

a) Dacă punctele *A*, *B*, *C* sunt necoliniare, atunci $\sphericalangle ABC + \sphericalangle BCA + \sphericalangle CAB = 180°$.	**A**	**F**
b) Dacă punctele *A*, *B*, *C* sunt coliniare, atunci $\sphericalangle ABC$ este alungit sau nul.	**A**	**F**
c) Suma măsurilor unghiurilor exterioare ale unui triunghi este egală cu 720°.	**A**	**F**

2. Încercuiește litera corespunzătoare răspunsului corect. **3 puncte**

a) Un triunghi are măsura unui unghi exterior egală cu 70°. Triunghiul este:
A. echilateral; **B.** ascuțitunghic; **C.** dreptunghic; **D.** obtuzunghic.

b) Un triunghi care are toate unghiurile exterioare obtuze este un triunghi:
A. obtuzunghic; **B.** ascuțitunghic; **C.** dreptunghic; **D.** echilateral.

3. Unește, prin săgeți, fiecare enunț aflat în coloana din stânga cu răspunsul corespunzător aflat în coloana din dreapta. **3 puncte**

Un triunghi care are:

a) un unghi exterior ascuțit este...	**1)** ascuțitunghic;
b) toate unghiurile exterioare congruente este...	**2)** dreptunghic;
c) un unghi exterior drept este...	**3)** echilateral;
	4) obtuzunghic.

Din oficiu: 1 punct

VI.1.3. Construcția triunghiurilor. Inegalități între elementele triunghiului

Rezolvăm, observăm și descoperim cunoștințe noi

1. Construcția un triunghi când se cunosc două laturi și unghiul determinat de acestea

Să construim un triunghi ABC care are $AB = 3$ cm, $AC = 2,5$ cm și $\sphericalangle A = 40°$.

Rezolvare:

- Construim un unghi XAY cu măsura de $40°$.
- Măsurăm pe semidreptele AX și AY segmentele AB și AC, astfel încât $AB = 3$ cm și $AC = 2,5$ cm.
- Punem în evidență segmentul BC și am obținut triunghiul ABC (figura 1).

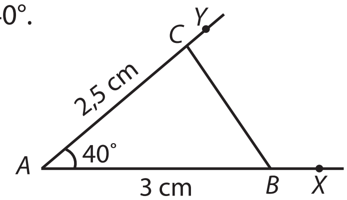


Fig. 1

Observații:

- Triunghiul ABC există și este unic și dacă unghiul A este drept, și dacă unghiul A este obtuz.
- Unghiul A nu poate fi unghi alungit! Dacă unghiul A este alungit, cele trei puncte A, B, C sunt coliniare și, ca urmare, ele nu mai determină un triunghi.

2. Construcția un triunghi când se cunosc o latură și unghiurile alăturate ei

Să construim un triunghi ABC care are $AB = 3$ cm, $\sphericalangle A = 45°$ și $\sphericalangle B = 65°$.

Rezolvare:

- Construim un segment AB cu lungimea de 3 cm.
- Construim semidreptele AX și BY, astfel încât $\sphericalangle XAB = 45°$ și $\sphericalangle YBA = 65°$.
- Notăm cu C intersecția celor două semidrepte și am obținut, astfel, triunghiul ABC (figura 2).

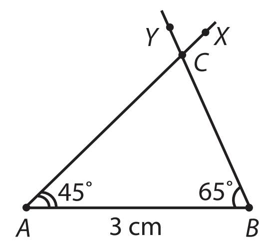


Fig. 2

Observații:

- Triunghiul există pentru $\sphericalangle A + \sphericalangle B < 180°$.
- Dacă $\sphericalangle A + \sphericalangle B = 180°$ (de exemplu: $\sphericalangle A = 60°$, $\sphericalangle B = 120°$), cele două semidrepte sunt paralele (unghiurile A și B devin unghiuri interne de aceeași parte a secantei AB), deci semidreptele nu se intersectează și triunghiul nu există (figura 3).
- Dacă $\sphericalangle A + \sphericalangle B > 180°$, semidreptele AX și BY nu se intersectează, deci triunghiul nu există nici în acest caz (figura 4).

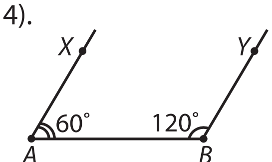


Fig. 3

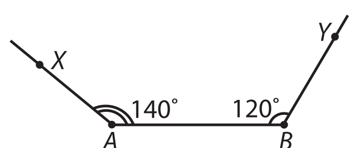


Fig. 4

3. Construcția un triunghi când se cunosc lungimile celor trei laturi

Să construim un triunghi ABC care are $AB = 4$ cm, $AC = 3$ cm și $BC = 2,5$ cm.

Rezolvare:

- Construim un segment AB cu lungimea de 4 cm.
- Construim cercul cu centrul în punctul A și raza $r_1 = AC = 3$ cm, $\mathscr{C}_1(A, 3 \text{ cm})$.
- Construim cercul cu centrul în punctul B și raza $r_2 = BC = 2,5$ cm, $\mathscr{C}_2(B, 2,5 \text{ cm})$.
- Notăm cu C unul dintre punctele de intersecție a celor două cercuri și am obținut triunghiul ABC (figura 5).

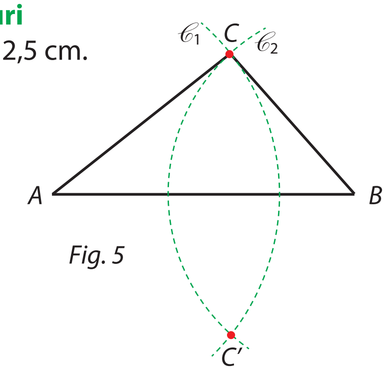


Fig. 5

Observații:

- Problema are două soluții, corespunzătoare celor două puncte de intersecție a cercurilor $\mathscr{C}_1$ și $\mathscr{C}_2$, C și C'.

- Pot apărea și situații când problema nu are nicio soluție:
  – cazul în care cercurile $\mathcal{C}_1$ și $\mathcal{C}_2$ sunt cercuri exterioare ($AB > AC + BC$) (figura 6).
  Exemplu: $AB = 3$ cm, $AC = 1{,}5$ cm, $BC = 1$ cm.
  – cazul în care cercurile $\mathcal{C}_1$ și $\mathcal{C}_2$ sunt tangente exterioare ($AB = AC + BC$) (figura 7).
  Exemplu: $AB = 2{,}5$ cm, $AC = 1{,}5$ cm, $BC = 1$ cm.

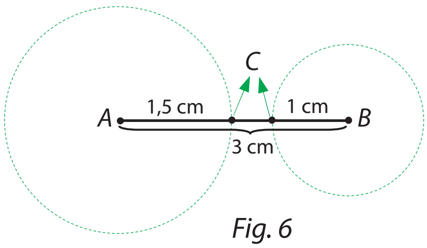


Fig. 6

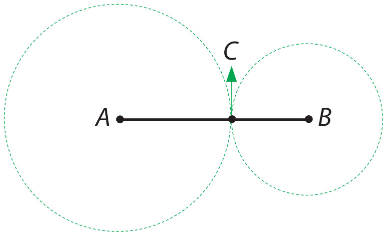


Fig. 7

Cele trei construcții realizate ilustrează **cazurile de construcție a triunghiurilor: LUL, ULU, LLL**.

4. Construiește un triunghi ABC, folosește instrumentele geometrice și verifică următoarele afirmații:
a) Dacă $BC < AC < AB$, atunci $\measuredangle A < \measuredangle B < \measuredangle C$;
b) Dacă $\measuredangle C < \measuredangle B < \measuredangle A$, atunci $AB < AC < BC$.

Rezolvare:

a) Construim, de exemplu, triunghiul ABC cu: $AB = 4$ cm, $AC = 3$ cm și $BC = 2{,}5$ cm (figura 8).
Prin măsurare cu raportorul obținem: $\measuredangle A < \measuredangle B < \measuredangle C$.

b) Construim, de exemplu, triunghiul ABC, cunoscând lungimea unei laturi și măsurile unghiurilor alăturate acesteia:
$AB = 2$ cm, $\measuredangle A = 70°$ și $\measuredangle B = 60°$ (figura 9). Din $\measuredangle A + \measuredangle B + \measuredangle C = 180°$, rezultă că $\measuredangle C = 180° - (70° + 60°) = 50°$ și $\measuredangle C < \measuredangle B < \measuredangle A$. Prin măsurare cu rigla obținem $BC = 2{,}4$ cm și $AC = 2{,}2$ cm, adică $AB < AC < BC$.

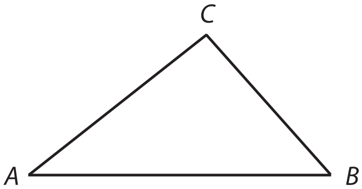


Fig. 8

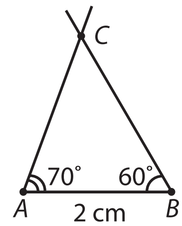


Fig. 9

Observație:

Problema 4 sugerează următorul rezultat: într-un triunghi, laturii mai mari i se opune unghiul mai mare și reciproc: într-un triunghi, unghiului mai mare i se opune latura mai mare.

Reține!

Cazurile de construcție a triunghiurilor

- **Cazul LUL** (latură – unghi – latură): se poate construi un triunghi când se cunosc lungimile a două laturi și măsura unghiului determinat de cele două laturi.
- **Cazul ULU** (unghi – latură – unghi): se poate construi un triunghi când se cunoaște lungimea unei laturi și măsurile unghiurilor alăturate laturii respective, dacă suma măsurilor celor două unghiuri este mai mică decât 180°.
- **Cazul LLL** (latură – latură – latură): se poate construi un triunghi când se cunosc lungimile laturilor triunghiului, dacă lungimea oricărei laturi este mai mică decât suma lungimilor celorlalte două laturi și mai mare decât modulul diferenței lungimilor celorlalte două laturi.

Inegalități între elementele triunghiului

- În orice triunghi, unei laturi cu lungimea mai mare i se opune un unghi cu măsura mai mare.
- În orice triunghi, unui unghi cu măsura mai mare i se opune o latură cu lungimea mai mare.
- În orice triunghi, lungimea unei laturi este mai mică decât suma lungimilor celorlalte două laturi și mai mare decât modulul diferenței lungimilor celorlalte două laturi (**inegalitatea triunghiului**).
- Într-un triunghi dreptunghic, lungimea oricărei catete este mai mică decât lungimea ipotenuzei.

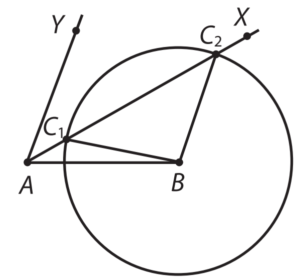
Aplicăm cunoștințele

a) Construiește un triunghi ABC cu $AB = 2$ cm, $BC = 1,5$ cm și $\sphericalangle A = 30°$. Ai reușit? Este unic triunghiul construit de tine?

b) Dacă $AB = 2$ cm, $BC = 1,5$ cm și $\sphericalangle A = 70°$, poți construi triunghiul ABC?

Rezolvare:

a) Pentru construcția acestui triunghi se cunosc lungimile a două laturi ale triunghiului și măsura unui unghi, dar nu a celui determinat de cele două laturi. Nu suntem în niciunul dintre cazurile de construcție a triunghiurilor.



- Desenăm segmentul AB cu lungimea de 2 cm.
- Desenăm într-unul dintre semiplanele determinate de dreapta AB o semidreaptă AX, astfel încât $\sphericalangle XAB = 30°$.
- Construim cercul cu centrul în punctul B și raza de 1,5 cm.
- Cercul intersectează semidreapta AX în două puncte C_1 și C_2.
- Triunghiurile ABC_1 și ABC_2 îndeplinesc condițiile din enunț.

Deci, am reușit să construim triunghiul, însă acesta nu este unic.

b) Pentru a rezolva b), procedăm la fel, doar că de data aceasta vom considera semidreapta OY, astfel încât $\sphericalangle YAB = 70°$. Se observă că semidreapta AY nu intersectează cercul cu centrul în punctul B și raza de 1,5 cm și, ca urmare, nu există acest triunghi.

Observație: În cazul în care se dau lungimile a două laturi și măsura unui unghi, altul decât cel determinat de cele două laturi, se pot construi două triunghiuri, unul sau niciunul, motiv pentru care acesta nu este un caz de construcție a triunghiurilor.

Exersează, fixează și aprofundează cunoștințele

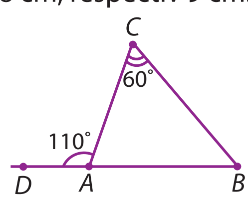
1. **Activitate pe grupe.** Construiți:
a) un triunghi ABC, știind că $AC = 5$ cm, $BC = 4$ cm și $\sphericalangle C = 120°$;
b) un triunghi MNP, știind că $MN = 4$ cm, $\sphericalangle M = 65°$ și $\sphericalangle N = 55°$;
c) un triunghi DEF, știind că $DE = 6$ cm, $EF = 3$ cm și $FD = 4$ cm.

2. Un triunghi ABC are $\sphericalangle BAC = 100°$ și măsura unui unghi exterior cu vârful în punctul B de 135°.
a) Scrie unghiurile triunghiului în ordine crescătoare.
b) Scrie laturile triunghiului în ordine descrescătoare.
c) Construiește triunghiul, știind că $AB = 4$ cm.

3. **a)** Construiește un triunghi ABC, știind că $AB = 4$ cm și $\sphericalangle A = \sphericalangle B = 50°$.
b) Măsoară laturile CA și CB. Ce observi?
c) Ce observație poți face?

4. Adunând, două câte două, lungimile laturilor unui triunghi, obținem 7 cm, 8 cm, respectiv 9 cm.
a) Calculează lungimile laturilor triunghiului.
b) Construiește triunghiul.

5. În figura alăturată se știe că $\sphericalangle DAC = 110°$ și $\sphericalangle ACB = 60°$.
a) Scrie unghiurile triunghiului în ordine descrescătoare.
b) Scrie laturile triunghiului în ordine crescătoare.



6. Perimetrul unui triunghi isoscel este egal cu 10 cm și lungimea uneia dintre laturi este egală cu 2 cm. Folosind inegalitatea triunghiului, determină lungimile celorlalte două laturi și construiește triunghiul.

7. Un triunghi MNP are $MN = 6$ cm, $NP = 1$ cm și $MP = x$ cm, unde x este un număr natural.
a) Folosește inegalitatea triunghiului și determină-l pe x.
b) Construiește triunghiul MNP.

8. Pentru fiecare dintre situațiile următoare, demonstrează că nu există niciun triunghi care să verifice condițiile date:
a) $AB = 10$ cm, $BC = 6$ cm, $AC = 2$ cm; **b)** $AB = 10$ cm, $BC = 6$ cm, $AC = 4$ cm;
c) $AB = 4{,}5$ cm, $\sphericalangle B = 180°$, $BC = 5{,}4$ cm; **d)** $\sphericalangle A = 89°$, $AB = 5$ cm, $\sphericalangle B = 110°$.

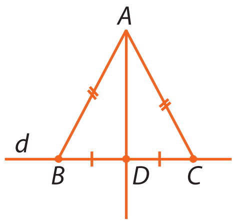
AUTOEVALUARE

10 min

1. Încercuiește litera corespunzătoare răspunsului corect. **3 puncte**
a) Dacă lungimile laturilor unui triunghi ABC sunt $AB = 10$ cm, $AC = 4$ cm și $BC = 8$ cm, atunci:
A. $\sphericalangle B < \sphericalangle A < \sphericalangle C$; **B.** $\sphericalangle A < \sphericalangle B < \sphericalangle C$; **C.** $\sphericalangle A < \sphericalangle C < \sphericalangle B$; **D.** $\sphericalangle C < \sphericalangle B < \sphericalangle A$.
b) Dacă măsurile unghiurilor unui triunghi ABC sunt $\sphericalangle A = 40°$ și $\sphericalangle B = 80°$, atunci:
A. $BC < AC < AB$; **B.** $AB < BC < AC$; **C.** $BC < AB < AC$; **D.** $AC < AB < BC$.

2. Unește, prin săgeți, fiecare enunț aflat în coloana din stânga cu răspunsul corespunzător aflat în coloana din dreapta. **4,5 puncte**

În figura alăturată, punctele B, C și D sunt situate pe dreapta d și triunghiul ABC este isoscel, cu baza BC. Punctul D este mijlocul segmentului BC, iar punctele M și N se află pe dreapta d și sunt diferite de punctele B, C și D.



a) Dacă $MD = ND$, atunci ... **1)** $AM = AB$ sau $AN = AC$;
b) Dacă M se află pe segmentul BC, atunci ... **2)** $AM > AB$;
c) Dacă M nu este pe segmentul BC, atunci ... **3)** $AM < AC$;
4) $AM = AN$.

3. Completează caseta cu răspunsul corect. **1,5 puncte**
Un triunghi MNP are $MN = 40$ mm și $NP = 30$ mm. Cel mai mare număr natural x, pentru care $MP = x$ cm, este egal cu $\boxed{}$.

Din oficiu: 1 punct

VI.1.4. LINII IMPORTANTE ÎN TRIUNGHI: BISECTOARELE UNGHIURILOR UNUI TRIUNGHI. CERCUL ÎNSCRIS ÎN TRIUNGHI

Observăm și descoperim cunoștințe noi

Mihaela construiește pe o coală de hârtie glasată, folosind cazul de construcție LLL, un triunghi ABC cu $AB = 12$ cm, $BC = 18$ cm și $AC = 16$ cm. Ea decupează triunghiul desenat și-l pliază, astfel încât semidreptele AB și AC să se suprapună, apoi îl aduce în forma inițială. Apoi pliază din nou triunghiul, astfel încât semidreptele BA și BC să se suprapună, și-l aduce iar la forma inițială. Repetă plierea, astfel încât semidreptele CA și CB să se suprapună, și-l aduce din nou la forma inițială.

a) Realizează și tu operațiile pe care le-a efectuat Mihaela.

b) Folosind rigla și creionul, pune în evidență dreptele după care s-au făcut cele trei plieri și notează cu I punctul de intersecție a celor trei drepte.

c) Folosind un raportor, verifică dacă AI, BI și CI sunt bisectoarele unghiurilor BAC, ABC și BCA.

d) Cu ajutorul unui echer, construiește perpendicularele din punctul I pe laturile BC, CA, respectiv AB ale triunghiului ABC și notează cu M, N, respectiv P, picioarele perpendicularelor.

e) Cu o riglă gradată, măsoară distanța de la punctul I la laturile triunghiului.

Observații:

• Pliind triunghiul, astfel încât semidreptele AB și AC să coincidă, am obținut semidreapta AI, care este axă de simetrie pentru unghiul BAC.

• Am învățat că axa de simetrie a oricărui unghi este bisectoarea unghiului.

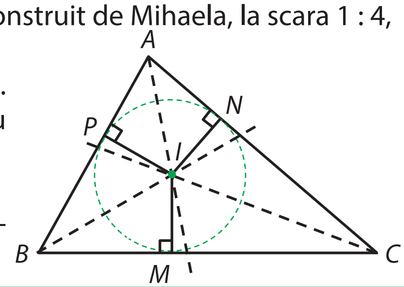
Deci AI este bisectoarea unghiului BAC (1). În același mod se poate arăta că BI și CI sunt bisectoarele unghiurilor CBA și BCA.

• Folosind raportorul și măsurând unghiurile formate de AI cu AB și AC vom constata că $\sphericalangle BAI \equiv \sphericalangle CAI$, adică AI este bisectoare, lucru constatat și în (1).

Repetând măsurătorile efectuate pentru AI și pentru BI, respectiv CI vom constata că AI, BI, CI sunt **bisectoarele unghiurilor triunghiului și că acestea sunt concurente în punctul *I***.

• Măsurând distanțele de la punctul I la laturile triunghiului vom constata că ele sunt egale și reprezintă razele unui cerc cu centrul în punctul I și care este tangent laturilor triunghiului. Acest cerc se numește **cerc înscris în triunghiul *ABC***.

În cele ce urmează vom construi un triunghi asemănător cu cel construit de Mihaela, la scara 1 : 4, folosind aceleași notații.



• Am obținut triunghiul ABC cu $AB = 3$ cm, $BC = 4{,}5$ cm și $AC = 4$ cm.

• Am construit bisectoarele unghiurilor triunghiului și am notat cu I punctul lor de intersecție.

• Am notat $d(I, BC) = IM$, $d(I, AC) = IN$ și $d(I, AB) = IP$.

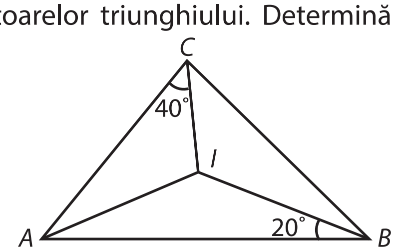
• Prin măsurare constatăm că $IM = IN = IP = r$, unde r este raza cercului cu centrul în punctul I și tangent laturilor triunghiului ABC.

Reține!

- Prin **bisectoare** într-un triunghi înțelegem bisectoarea unui unghi al triunghiului respectiv. Cum un triunghi are trei unghiuri, el are trei bisectoare.
- **Bisectoarele** oricărui triunghi **sunt concurente** într-un punct, care, de regulă, se notează cu I și reprezintă centrul unui cerc tangent laturilor triunghiului, numit **cerc înscris în triunghi**.
- Distanțele de la punctul de concurență a bisectoarelor unghiurilor unui triunghi la laturile acestuia sunt egale cu raza cercului înscris în triunghi.

Aplicăm cunoștințele

Se consideră un triunghi ABC și se notează cu I intersecția bisectoarelor triunghiului. Determină măsurile unghiurilor triunghiului, știind că $\sphericalangle ABI = 20°$ și $\sphericalangle ACI = 40°$.



***Rezolvare*:**

Dacă BI este bisectoare și $\sphericalangle ABI = 20°$, atunci $\sphericalangle ABC = 2 \cdot 20° = 40°$ (1).
Dacă CI este bisectoare și $\sphericalangle ACI = 40°$, atunci $\sphericalangle ACB = 2 \cdot 40° = 80°$ (2).
Cum $\sphericalangle ABC + \sphericalangle ACB + \sphericalangle BAC = 180°$, ținând cont de (1) și (2), rezultă $40° + 80° + \sphericalangle BAC = 180°$ și $\sphericalangle BAC = 60°$.

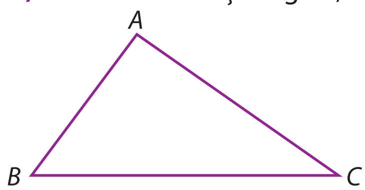
Exersează, fixează și aprofundează cunoștințele

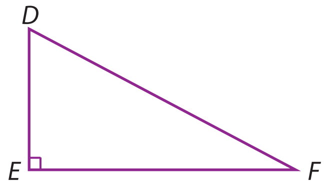
1. Denumește și desenează:
a) bisectoarea unui unghi; **b)** bisectoarea unui triunghi; **c)** cerc înscris într-un triunghi.

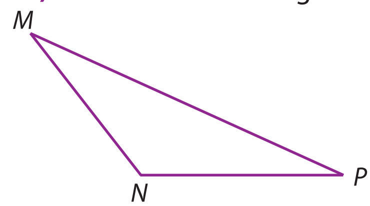
2. **a)** Construiește un triunghi ABC și notează cu I centrul cercului înscris în triunghi.
b) Pune în evidență segmentele AI, BI și CI.
c) Dacă $\sphericalangle IBC = 27°$ și $\sphericalangle ICA = 43°$, calculează unghiurile triunghiului ABC.

3. Activitate pe grupe. Construiți, folosind raportorul, bisectoarele unghiurilor triunghiului și notează cu I punctul de intersecție a bisectoarelor în fiecare dintre cazurile:

a) ΔABC este ascuțitunghic; **b)** ΔDEF este dreptunghic; **c)** ΔMNP este obtuzunghic.



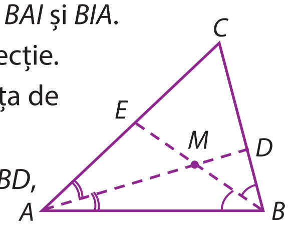




4. a) Construiește un triunghi ABC și bisectoarele acestuia. Notează cu I punctul de intersecție a bisectoarelor.

b) Dacă $\sphericalangle ABC \equiv \sphericalangle ACB$ și $\sphericalangle BIC = 110°$, calculează măsurile unghiurilor BAC, BAI și BIA.

5. În figura alăturată AD și BE sunt bisectoare și M este punctul lor de intersecție. Dacă distanța de la punctul M la latura AB este egală cu 3 cm, care este distanța de la punctul M la latura BC? Dar distanța de la M la latura AC?



6. Punctul D este interior unui triunghi ABC. Dacă $\sphericalangle BAD = \sphericalangle CAD$ și $\sphericalangle ABD \equiv \sphericalangle CBD$, arată că $\sphericalangle BCD \equiv \sphericalangle ACD$.

7. În triunghiul ABC, cu $\sphericalangle BAC = 72°$, se notează cu I punctul de intersecție a bisectoarelor unghiurilor ABC și ACB. Calculează măsura unghiului BIC.

8. Se consideră un triunghi ABC și semidreapta AD bisectoarea unghiului BAC, $D \in BC$. Construiește triunghiul ABC, pentru fiecare dintre situațiile următoare și descrie pașii de realizare a construcției.

a) $\sphericalangle ABC = 47°$, $AB = 4$ cm și $\sphericalangle BAD = 23°$; **b)** $\sphericalangle BAC = 60°$, $AB = 4$ cm și $AD = 5$ cm.

AUTOEVALUARE

10 min

1. Dacă apreciezi că afirmația este adevărată, încercuiește litera A. În caz contrar, încercuiește litera F. **4,5 puncte**

a) Punctul de intersecție a bisectoarelor unui triunghi este egal depărtat de laturile triunghiului. **A F**

b) Punctul de intersecție a bisectoarelor unui triunghi nu este centrul cercului înscris în triunghi. **A F**

c) Laturile oricărui triunghi sunt tangente cercului înscris în triunghi. **A F**

2. Încercuiește litera corespunzătoare răspunsului corect. **3 puncte**

a) În triunghiul ABC, AD este bisectoarea unghiului BAC. Dacă $\sphericalangle DAC = 30°$ și $\sphericalangle BDA = 60°$, atunci măsura unghiului ABC este egală cu:

A. 60°; **B.** 90°; **C.** 100°; **D.** 120°.

b) În triunghiul MNP, MM' și NN' sunt bisectoare, iar I este punctul de intersecție a bisectoarelor. Dacă distanța de la punctul I la latura MN este egală cu 3 cm, atunci distanța de la punctul I la latura NP este egală cu:

A. 6 cm; **B.** 2 cm; **C.** 4 cm; **D.** 3 cm.

3. Completează spațiul punctat cu răspunsul corect. **1,5 puncte**

Cercul înscris în triunghi este ... laturilor triunghiului.

Din oficiu: 1 punct

VI.1.5. Linii importante în triunghi. Mediatoarele laturilor unui triunghi. Cercul circumscris unui triunghi

Observăm și descoperim cunoștințe noi

Alexandru construiește pe o coală de hârtie glasată, folosind cazul de construcție LLL, un triunghi *ABC* cu *AB* = 12 cm, *BC* = 18 cm și *AC* = 16 cm. Decupează triunghiul desenat și-l pliază, astfel încât vârful *A* să se suprapună peste vârful *B*, apoi îl aduce la forma inițială. Repetă plierea, pentru a suprapune vârful *A* peste vârful *C*, aduce la forma inițială și apoi suprapune vârful *B* peste vârful *C*.

a) Realizează și tu operațiile pe care le-a efectuat Alexandru.

b) Folosind rigla și creionul, pune în evidență liniile după care s-au făcut cele trei plieri, notează cu *O* punctul de intersecție a celor trei drepte.

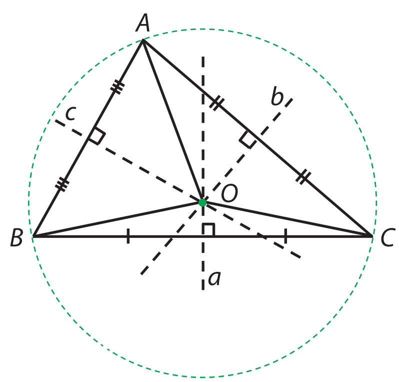
c) Verifică, prin măsurare, dacă cele trei drepte sunt mediatoarele segmentelor *AB*, *BC* și *CA*.

d) Cu o riglă gradată, măsoară distanțele de la punctul *O* la vârfurile triunghiului.

Observații:

• Pliind triunghiul până când vârful *A* se suprapune peste vârful *B*, am obținut mijlocul segmentului *AB*. Cum cele două unghiuri formate în mijlocul segmentului sunt congruente (prin suprapunere coincid) și suplementare, fiecare dintre ele este un unghi drept. Ca urmare, dreapta după care s-a făcut plierea este perpendiculară pe mijlocul segmentului *AB*, adică dreapta este mediatoarea segmentului *AB*. În același mod se poate arăta că și celelalte drepte după care s-a făcut plierea sunt mediatoare ale laturilor *AC* și, respectiv, *BC*.

• Se poate verifica inclusiv prin măsurare că dreptele după care s-a făcut plierea sunt mediatoarele laturilor triunghiului. Am obținut astfel că **mediatoarele laturilor triunghiului sunt concurente în punctul *O***.



• Măsurând distanțele de la punctul *O* la vârfurile triunghiului, vom constata că acestea sunt egale, deci reprezintă razele unui cerc cu centrul în punctul *O*, care trece prin toate vârfurile triunghiului. Acest cerc se numește **cercul circumscris triunghiului *ABC***.

În cele ce urmează vom construi un triunghi asemănător cu cel construit de Alexandru, la scara 1 : 4, folosind aceleași notații.

• Am obținut triunghiul *ABC* cu *AB* = 3 cm, *BC* = 4,5 cm și *AC* = 4 cm.

• Am construit mediatoarele laturilor triunghiului, le-am notat cu *c*, *b* și, respectiv, *a* și am notat cu *O* punctul lor de intersecție.

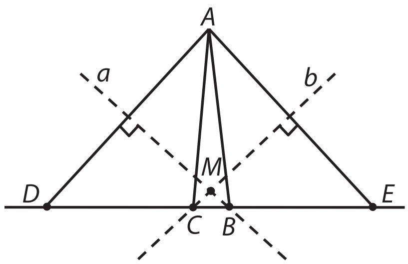
• Măsurând distanțele de la punctul *O* la vârfurile triunghiului, constatăm că *OA* = *OB* = *OC* = *R*, unde *R* este raza cercului cu centrul în punctul *O* și care trece prin toate vârfurile triunghiului.

Reține!

- Prin **mediatoare** într-un triunghi înțelegem mediatoarea unei laturi a triunghiului respectiv. Cum un triunghi are trei laturi, înseamnă că are trei mediatoare.
- **Mediatoarele** oricărui triunghi **sunt concurente** într-un punct, care, de regulă, se notează cu *O* și reprezintă centrul unui cerc care trece prin toate vârfurile triunghiului, numit **cercul circumscris triunghiului**.
- Distanțele de la punctul de concurență a mediatoarelor laturilor unui triunghi la vârfurile acestuia sunt egale cu raza cercului circumscris triunghiului.
- Centrul cercului circumscris unui triunghi ascuțitunghic se află în interiorul triunghiului.
- Centrul cercului circumscris unui triunghi dreptunghic este mijlocul ipotenuzei.
- Centrul cercului circumscris unui triunghi obtuzunghic se află în exteriorul triunghiului.

Aplicăm cunoștințele

Punctele D și E din figura alăturată sunt situate pe dreapta determinată de vârfurile B și C ale triunghiului ABC. Dacă punctul B se află pe mediatoarea segmentului AD, punctul C se află pe mediatoarea segmentului AE și M este punctul de intersecție a celor două mediatoare, demonstrează că:



a) punctul M se află pe mediatoarea segmentului DE;

b) dacă triunghiul ABC este isoscel, atunci $CD = BE$;

c) dacă $CD = BE$, atunci triunghiul ABC este isoscel.

***Rezolvare*:**

a) Notăm cu a și b mediatoarele segmentelor AD și AE. Din $a \cap b = \{M\}$ rezultă că $M \in a$ și $M \in b$. Din $M \in a$ rezultă că $MA = MD$ (1), iar din $M \in b$ rezultă că $MA = ME$ (2). Din (1) și (2) obținem $MD = ME$, adică punctul M se află pe mediatoarea segmentului DE.

b) Din $B \in a$ rezultă că $AB = DB$ (3), iar din $C \in b$ rezultă $AC = EC$ (4). Dacă triunghiul ABC este isoscel, atunci $AB = AC$ și din (3) și (4) rezultă că $DB = EC$, adică $CD + CB = CB + BE$ și $CD = BE$.

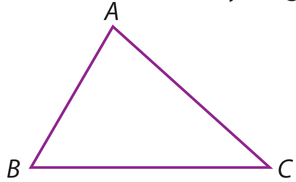
c) Dacă $CD = BE$, atunci $CD + CB = BE + CB$, adică $DB = EC$ (5). Dar $DB = AB$ ($B \in a$) și $EC = AC$ ($C \in b$); ținând cont de (5) rezultă că $AB = AC$, adică triunghiul ABC este isoscel.

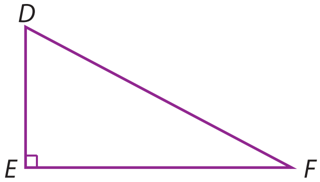
Exersează, fixează și aprofundează cunoștințele

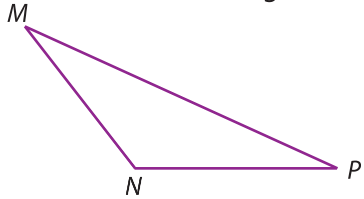
1. Construiește: **a)** mediatoarea unui segment; **b)** mediatoarele laturilor unui triunghi; **c)** cercul circumscris unui triunghi.

2. **Activitate pe grupe.** Construiți, folosind rigla și echerul, mediatoarele laturilor triunghiului și notează cu O punctul de intersecție a mediatoarelor în fiecare din cazurile:

a) ΔABC este ascuțitunghic; **b)** ΔDEF este dreptunghic; **c)** ΔMNP este obtuzunghic.







3. **Activitate pe grupe.** Construiți cercurile circumscrise triunghiurilor din figurile de mai sus și completați spațiile punctate pentru a obține propoziții adevărate.

a) Centrul cercului circumscris unui triunghi ascuțitunghic se află ... .

b) Centrul cercului circumscris unui triunghi dreptunghic este ... .

c) Centrul cercului circumscris unui triunghi obtuzunghic se află ... .

4. **a)** Construiește un triunghi isoscel ABC cu $AB = AC$ și mediatoarele laturilor AB și AC. Notează cu O punctul de intersecție a mediatoarelor.

b) Dacă punctul M este mijlocul laturii BC, arată că punctele A, O și M sunt coliniare.

5. Triunghiul ABC este ascuțitunghic, cu $AB = 4$ cm și $AC = 6$ cm. Mediatoarea laturii BC intersectează latura AC în punctul D.

a) Realizează o figură care să ilustreze datele problemei.

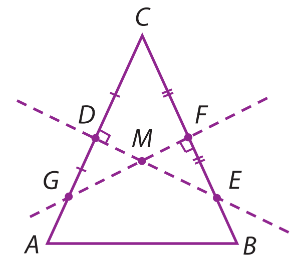
b) Calculează perimetrul triunghiului ABD.

6. **a)** Dacă vârful A al triunghiului ABC se află pe mediatoarea segmentului BC, stabilește natura triunghiului ABC.

b) Dacă vârfurile A și B ale triunghiului ABC se află pe mediatoarele laturilor BC, respectiv AC, stabilește natura triunghiului ABC.

7. În figura alăturată, *DE* și *FG* sunt mediatoare și *M* este punctul lor de intersecție. Dacă distanța de la punctul *M* la vârful *A* este de 3 cm, care este distanța de la *M* la vârful *B*? Dar distanța de la punctul *M* la vârful *C*?

8. Se consideră punctele *A*, *B*, *O*, *C* și *D*, coliniare în această ordine. Dreapta *MO* este atât mediatoarea segmentului *BC*, cât și mediatoarea segmentului *AD*. Știind că $BO = 10$ cm, $\mathscr{P}_{\Delta AMD} = 120$ cm și $\mathscr{P}_{\Delta BMC} = 70$ cm, calculează lungimile segmentelor *BC* și *MB* și perimetrul triunghiului *MBA*.



AUTOEVALUARE

10 min

1. Dacă apreciezi că afirmația este adevărată, încercuiește litera A. În caz contrar, încercuiește litera F. **4,5 puncte**

a) Punctul de intersecție a mediatoarelor unui triunghi este egal depărtat de vârfurile triunghiului. **A F**

b) Punctul de intersecție a mediatoarelor unui triunghi nu este centrul cercului circumscris triunghiului. **A F**

c) Vârfurile oricărui triunghi se află pe cercul circumscris triunghiului. **A F**

2. Încercuiește litera corespunzătoare răspunsului corect. **3 puncte**

a) Un triunghi *ABC* are vârful *A* pe mediatoarea laturii *BC* și vârful *B* pe mediatoarea laturii *AC*. Triunghiul *ABC* este:

A. scalen; **B.** dreptunghic; **C.** echilateral; **D.** obtuzunghic.

b) Se consideră un triunghi dreptunghic *ABC*. Dacă lungimea ipotenuzei este egală cu 10 cm, atunci distanța de la centrul cercului circumscris triunghiului la vârful unghiului drept al triunghiului este egală cu:

A. 10 cm; **B.** 5 cm; **C.** 20 cm; **D.** 2,5 cm.

3. Completează spațiul punctat cu răspunsul corect. **1,5 puncte**

Centrul cercului circumscris unui triunghi dreptunghic este ... .

Din oficiu: 1 punct

VI.1.6. LINII IMPORTANTE ÎN TRIUNGHI. ÎNĂLȚIMILE UNUI TRIUNGHI

Rezolvăm, observăm și descoperim cunoștințe noi

Ne propunem să calculăm aria unui triunghi.

a) Construiește pe hârtie glasată un dreptunghi *ABCD*, cu $AB = 12$ cm și $BC = 6$ cm.

b) Unește punctele *B* și *D*, decupează dreptunghiul după dreapta *BD* și verifică dacă cele două triunghiuri, determinate de dreapta *BD* cu laturile dreptunghiului, coincid prin suprapunere. Ce observi?

c) Scrie formula pentru aria dreptunghiului și, folosind această formulă, scrie formula ariei unui triunghi dreptunghic. Ce observi?

d) Construiește un triunghi oarecare *ABC*, construiește perpendiculara din punctul *A* pe dreapta *BC* și notează cu *D* piciorul perpendicularei.

e) Scrie formula ariei pentru triunghiurile *ABD*, *ACD* și *ABC*. Ce observi?

Rezolvare:

Vom folosi scara 1 : 3 pentru a ilustra etapele activității.

a) Construim figura 1.

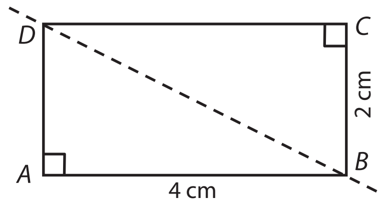


Fig. 1

b) Decupând cele două triunghiuri dreptunghice, suprapunem latura AD peste latura CB și latura AB peste latura CD. Astfel, prin suprapunere, cele două triunghiuri coincid, reprezintă aceeași suprafață, deci vor avea aceeași arie. Mai exact, aria fiecărui triunghi dreptunghic va fi egală cu jumătate din aria dreptunghiului.

c) $\mathcal{A}_{ABCD} = L \cdot l = AB \cdot AD$ și $\mathcal{A}_{\Delta ABD} = \dfrac{AB \cdot AD}{2}$, unde AB și AD sunt catete ale triunghiului dreptunghic ABD.

Aria unui triunghi dreptunghic este egală cu semiprodusul catetelor.

d) Construim figura 2.

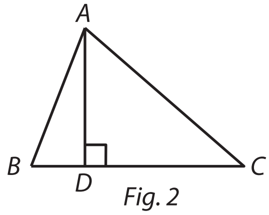


Fig. 2

e) Triunghiurile ABD și ACD sunt dreptunghice; $\mathcal{A}_{\Delta ABD} = \dfrac{BD \cdot AD}{2}$, $\mathcal{A}_{\Delta ACD} = \dfrac{CD \cdot AD}{2}$,

iar $\mathcal{A}_{\Delta ABC} = \mathcal{A}_{\Delta ABD} + \mathcal{A}_{\Delta ACD}$. Obținem $\mathcal{A}_{\Delta ABC} = \dfrac{BD \cdot AD}{2} + \dfrac{CD \cdot AD}{2} = \dfrac{AD}{2} \cdot (BD + CD) = \dfrac{AD}{2} \cdot BC = \dfrac{BC \cdot AD}{2}$.

Observații:

1. Perpendiculara dintr-un vârf al unui triunghi pe dreapta corespunzătoare laturii opuse se numește *înălțime*.

În triunghiul ABC din figura 3, $AD \perp BC$, $BE \perp AC$ și $CF \perp AB$, deci AD, BE și CF sunt înălțimi.

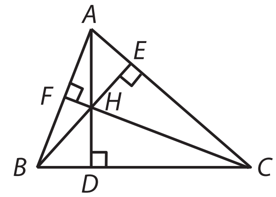


Fig. 3

2. Dreptele determinate de înălțimile unui triunghi sunt concurente (trec prin același punct).

3. Punctul de concurență a înălțimilor se notează, de regulă, cu H și se numește *ortocentrul triunghiului*.

4. În cazul triunghiului dreptunghic, două dintre înălțimi sunt catetele triunghiului și, ca urmare, ortocentrul triunghiului dreptunghic este vârful unghiului drept. În figura 4, $AB \perp AC$, $AC \perp AB$, $AD \perp BC$ și ortocentrul triunghiului este punctul A.

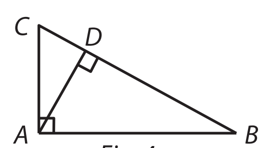
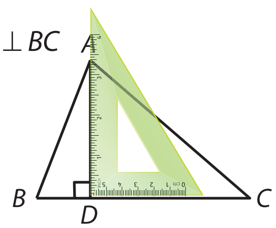


Fig. 4

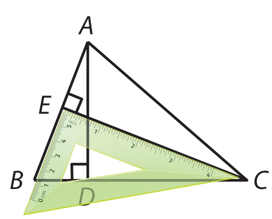
Construcția înălțimilor unui triunghi ascuțitunghic

Înălțimile se construiesc cu ajutorul echerului: se plasează echerul cu una dintre catete pe latura pe care dorim să coborâm perpendiculara și translatăm echerul spre stânga sau spre dreapta, până când cealaltă catetă trece prin vârful opus acelei laturi.

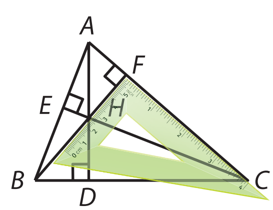
❶ $AD \perp BC$



❷ $AD \perp BC$, $CE \perp AB$



❸ $AD \perp BC$, $CE \perp AB$, $BF \perp AC$



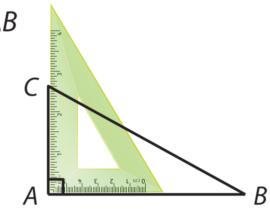
$AD \cap CE \cap BF = \{H\}$

H este punct interior triunghiului

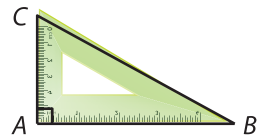
Construcția înălțimilor unui triunghi dreptunghic

- Două dintre înălțimi sunt deja construite, ele fiind catetele triunghiului dreptunghic.
- Punctul de intersecție a catetelor este vârful unghiului drept.
- Cea de-a treia înălțime se construiește cu ajutorul echerului.

❶ $CA \perp AB$

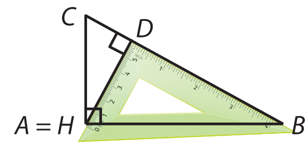


❷ $CA \perp AB$, $AB \perp CA$



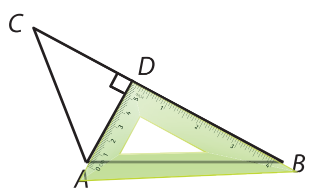
❸ $CA \perp AB$, $AB \perp CA$, $AD \perp BC$

$H = A$ este ortocentru

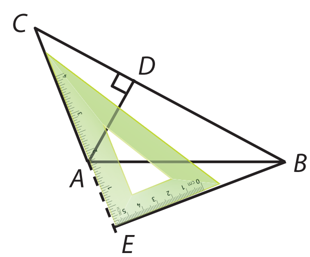


Construcția înălțimilor unui triunghi obtuzunghic

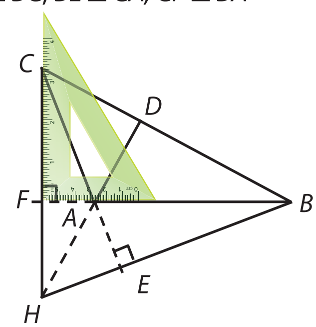
❶ $AD \perp BC$



❷ $AD \perp BC$, $BE \perp CA$



❸ $AD \perp BC$, $BE \perp CA$, $CF \perp BA$



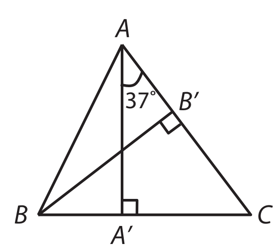
H este punct exterior triunghiului

Reține!

- Se numește **înălțime** în triunghi segmentul determinat de un vârf al triunghiului și piciorul perpendicularei din acel vârf pe dreapta corespunzătoare laturii opuse (sau lungimea acestui segment, în funcție de context).
- Înălțimile se construiesc cu ajutorul echerului.
- Dreptele determinate de înălțimile unui triunghi sunt concurente. Punctul de concurență a înălțimilor se notează, de regulă, cu *H* și se numește **ortocentrul triunghiului**. În triunghiul ascuțitunghic, ortocentrul se află în *interiorul triunghiului*; în triunghiul obtuzunghic, ortocentrul se află în *exteriorul triunghiului*; în triunghiul dreptunghic, ortocentrul coincide cu *vârful unghiului drept*.
- **Aria unui triunghi** este egală cu semiprodusul dintre lungimea bazei și înălțimea corespunzătoare bazei.

Aplicăm cunoștințele

În triunghiul ABC se construiesc înălțimile AA' și BB', $A' \in BC$ și $B' \in AC$. Știind că $\sphericalangle A'AC = 37°$, calculează măsurile unghiurilor $A'CA$ și $B'BC$.



Rezolvare:

În triunghiul $A'AC$, cu $\sphericalangle A' = 90$, avem: $\sphericalangle A'AC + \sphericalangle AA'C + \sphericalangle A'CA = 180°$, adică $37° + 90° + \sphericalangle A'CA = 180°$, de unde $\sphericalangle A'CA = 53°$.

În triunghiul $B'BC$, cu $\sphericalangle B' = 90$, avem: $\sphericalangle B'BC + \sphericalangle BB'C + \sphericalangle BCB' = 180°$, adică $\sphericalangle B'BC + 90° + 53° = 180°$, de unde $\sphericalangle B'BC = 37°$.

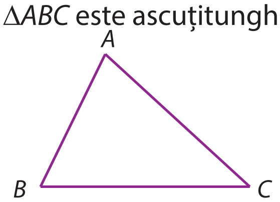
Observație: Unghiul $A'CA$ coincide cu unghiul BCB', deoarece dreapta $A'C$ este identică cu dreapta BC (B, A', C sunt puncte coliniare) și dreapta CA este identică cu dreapta CB' (C, B', A sunt puncte coliniare).

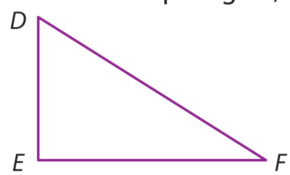
Exersează, fixează și aprofundează cunoștințele

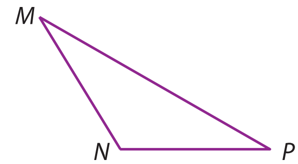
1. **Activitate pe grupe.** Construiți:

a) perpendiculara dintr-un punct A pe o dreaptă d și notează cu A' piciorul perpendicularei;
b) distanța de la un punct A la o dreaptă d;
c) înălțimea unui triunghi;
d) ortocentrul unui triunghi.

2. Construiește triunghiul, înălțimile triunghiului și notează cu H punctul de intersecție în fiecare caz:
a) ΔABC este ascuțitunghic; **b)** ΔDEF este dreptunghic; **c)** ΔMNP este obtuzunghic.







3. **a)** Construiește un triunghi ABC, înălțimile AA', BB' și notează cu H punctul lor de intersecție.
b) Dacă $\sphericalangle ABB' = 20°$ și $\sphericalangle AHB' = 40°$, calculează măsurile unghiurilor triunghiului.

4. **a)** Construiește un triunghi ABC, știind că $\sphericalangle A = 50°$, $\sphericalangle B = 70°$ și înălțimea AA' este egală cu 5 cm.
b) Explică pașii parcurși pentru construirea triunghiului.
c) Ce măsură are unghiul dintre dreptele AA' și AB?

5. În triunghiul ABC, semidreapta BB' este bisectoarea unghiului ABC, $B' \in AC$, iar semidreapta BD este bisectoarea unghiului ABB', $D \in AC$. Se notează cu E piciorul perpendicularei din punctul D pe latura BC. Știind că $\sphericalangle ABB' = 40°$ și $\sphericalangle BAB' = 70°$, calculează:
a) măsurile unghiurilor triunghiului ABC;
b) măsurile unghiurilor ADB, ABB' și $BB'C$.

6. Triunghiul ABC este dreptunghic în A și $\sphericalangle ABC = 43°$. Dacă AD este înălțime în triunghiul ABC, calculează măsurile unghiurilor: **a)** $\sphericalangle DAB$; **b)** $\sphericalangle DCA$; **c)** $\sphericalangle DAC$; **d)** $\sphericalangle ADC$.

7. În triunghiul ABC, BB' și CC' sunt înălțimi ($B' \in AC$, $C' \in AB$), iar BD și CE sunt semidrepte opuse semidreptelor BB' și CC'. Demonstrează că: **a)** $\sphericalangle ABB' \equiv \sphericalangle ACC'$; **b)** $\sphericalangle ABD \equiv \sphericalangle ACE$.

AUTOEVALUARE

1. **Încercuiește litera corespunzătoare răspunsului corect.** **3 puncte**

a) Dreapta AD este înălțime a triunghiului ABC ($D \in BC$) și $\sphericalangle ABC = 50°$. Dacă pe segmentul AD există un punct M egal depărtat de laturile AB și AC ale triunghiului, atunci măsura unghiului BAC este egală cu:

A. 100°; **B.** 80°; **C.** 40°; **D.** 50°.

b) În triunghiul MNP, MM' și NN' sunt înălțimi, iar H este ortocentrul triunghiului. Măsura unghiului dintre dreptele PH și MN este egală cu:

A. 30°; **B.** 60°; **C.** 90°; **D.** 180°.

2. **Unește, prin săgeți, fiecare enunț aflat în coloana din stânga cu răspunsul corespunzător aflat în coloana din dreapta.** **4,5 puncte**

a) Ortocentrul unui triunghi ascuțitunghic este ...
b) Ortocentrul unui triunghi dreptunghic este ...
c) Ortocentrul unui triunghi obtuzunghic este...

1) în exteriorul triunghiului;
2) mijlocul uneia dintre laturile triunghiului;
3) un vârf al triunghiului;
4) în interiorul triunghiului.

3. **Completează spațiul punctat cu răspunsul corect.** **1,5 puncte**

Într-un triunghi, înălțimea poate fi considerată segmentul de dreaptă determinat de un vârf al triunghiului și piciorul perpendicularei din vârf pe latura opusă, dar și ... .

Din oficiu: 1 punct

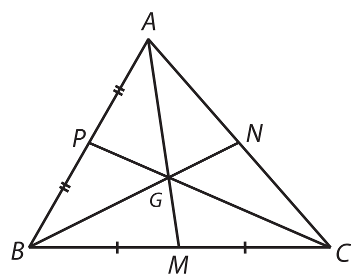
VI.1.7. Linii importante în triunghi. Medianele unui triunghi

Rezolvăm, observăm și descoperim cunoștințe noi

1. Punctul *M* este mijlocul laturii *BC* a unui triunghi *ABC*.
a) Construiește triunghiul, știind că $AB = 4$ cm, $BC = 5$ cm și $AM = 3{,}5$ cm.
b) Despre segmentul determinat de vârful *A* al triunghiului *ABC* și de mijlocul *M* al laturii *BC* se spune că este mediană a triunghiului *ABC*. Construiește și mediana determinată de vârful *C* și mijlocul *P* al laturii *AB*.
c) Notează cu *G* punctul de intersecție a medianelor *AM* și *CP* și cu *N* intersecția dreptei *BG* cu dreapta *AC*. Folosește o riglă gradată sau compasul și arată că *CP* este mediană a triunghiului *ABC*.

Rezolvare:

a) Construim segmentul $BC = 5$ cm și notăm cu *M* mijlocul său. Obținem $BM = MC = 5$ cm $: 2 = 2{,}5$ cm. Construim triunghiul *ABM* folosind cazul de construcție LLL ($AB = 4$ cm, $BM = 2{,}5$ cm și $AM = 3{,}5$ cm). Unim punctul *A* cu punctul *C* și am obținut triunghiul *ABC*.
b) Considerăm $P \in AB$, astfel încât $AP = BP = AB : 2 = 4$ cm $: 2 = 2$ cm. Unim punctul *C* cu punctul *P* și am construit astfel mediana *CP*.
c) Notăm $\{G\} = AM \cap CP$ și $BG \cap AC = \{N\}$. Folosind deschiderea compasului, verificăm congruența segmentelor *AN* și *CN*. Deci, segmentul *BN* este cea de a treia mediană a triunghiului *ABC*.



Construcția medianei într-un triunghi

Pentru a construi mediana unui triunghi se parcurg următoarele etape:
- se măsoară latura opusă vârfului din care dorim să construim mediana și se fixează mijlocul laturii (figura 1);
- se unește vârful cu mijlocul laturii opuse (figura 2);
- se obține figura 3.

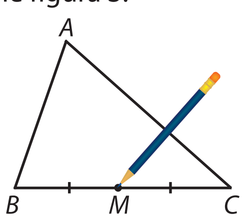


Fig. 1

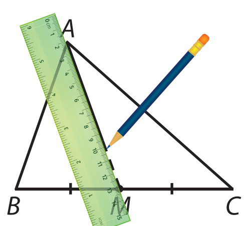


Fig. 2

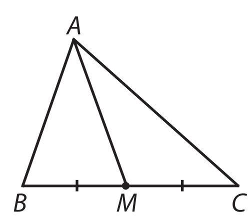


Fig. 3

Observație:

Cu același procedeu se construiește cea de-a doua mediană, de exemplu, *BN* (figura 4). Apoi:
- se notează intersecția medianelor *AM* și *BN* cu *G* (figura 4);
- se notează cu *P* intersecția dreptei *CG* cu segmentul *AB* (figura 4);
- segmentul *CP* va fi cea de-a treia mediană a triunghiului *ABC*.

Într-adevăr, folosind compasul, constatăm că $AP = PB$. Rezultă că *P* este mijlocul segmentului *AB*, deci *CP* este mediană a triunghiului *ABC*, care trece prin punctul *G*, numit centrul de greutate al triunghiului.

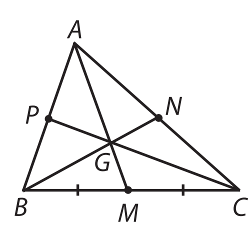


Fig. 4

2. a) Construiește triunghiul *ABC*, știind că $AB = 3$ cm, $\sphericalangle BAC = 80°$ și $AC = 2$ cm. Construiește medianele *AA'*, *BB'* și *CC'* și notează cu *G* centrul de greutate al triunghiului.

b) Măsoară segmentele *AG* și *A'G* și calculează rapoartele: $\dfrac{AG}{AA'}, \dfrac{A'G}{AA'}, \dfrac{A'G}{AG}$.

c) Măsoară segmentele *BG* și *B'G* și calculează rapoartele: $\dfrac{BG}{BB'}, \dfrac{B'G}{BB'}, \dfrac{B'G}{BG}$.

d) Măsoară segmentele *CG* și *C'G* și calculează rapoartele: $\dfrac{CG}{CC'}, \dfrac{C'G}{CC'}, \dfrac{C'G}{CG}$.

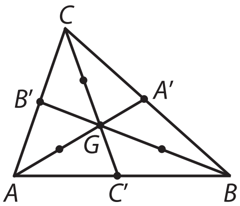


Fig. 5

Observații:

- Construind, măsurând și efectuând calculele, remarcăm că raportul în care centrul de greutate al triunghiului împarte medianele este același pe fiecare mediană.
- Centrul de greutate al triunghiului se află la o treime de baza triunghiului și la două treimi de vârful triunghiului.

Reține!

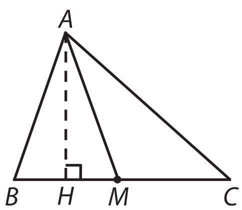
- **Mediana** unui triunghi este segmentul determinat de un vârf al triunghiului și mijlocul laturii opuse.
- Triunghiul are trei mediane.
- Într-un triunghi **medianele sunt concurente** într-un punct notat, de regulă, cu *G* și numit **centru de greutate al triunghiului**.
- *Centrul de greutate al triunghiului se află pe fiecare mediană la o treime de bază și două treimi de vârf.*
- *În orice triunghi dreptunghic, lungimea medianei este jumătate din lungimea ipotenuzei.*
- Într-un triunghi, orice mediană determină două triunghiuri cu arii egale, numite **triunghiuri echivalente**.

Aplicăm cunoștințele

În triunghiul *ABC* se construiește mediana *AM*, $M \in BC$. Arată că ariile triunghiurilor *ABM* și *ACM* sunt egale.

Rezolvare:

Construim înălțimea *AH* ($AH \perp BC$, $H \in BC$). Calculăm aria triunghiului *ABM* și notăm: $\mathcal{A}_1 = \dfrac{BM \cdot AH}{2}$ (1). Calculăm aria triunghiului *ACM* și notăm: $\mathcal{A}_2 = \dfrac{CM \cdot AH}{2}$ (2). Cum $M \in BC$ și $BM = CM$ rezultă, ținând cont de (1) și (2), că $\mathcal{A}_1 = \mathcal{A}_2$.



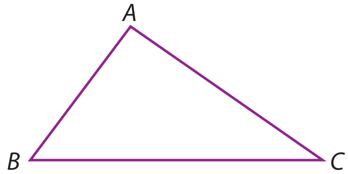
Observații:

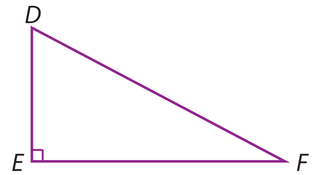
- Triunghiul ascuțitunghic *ABM* are aceeași înălțime cu triunghiul obtuzunghic *AMC* (perpendiculara dintr-un punct pe o dreaptă este unică) și au bazele congruente ($M \in BC$, cu $BM = MC = \dfrac{BC}{2}$).
- Cele două triunghiuri determinate de mediana *AM* au aceeași arie și fiecare are aria egală cu jumătate din aria triunghiului *ABC*.
- Triunghiurile *ABM* și *ACM* sunt triunghiuri echivalente.

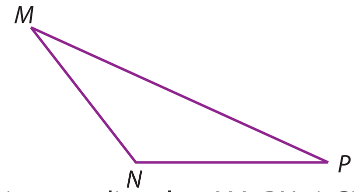
Exersează, fixează și aprofundează cunoștințele

1. Activitate pe grupe. Pentru fiecare dintre situațiile de mai jos, construiți medianele triunghiului și notează cu G punctul lor de intersecție:

a) ΔABC este ascuțitunghic; **b)** ΔDEF este dreptunghic; **c)** ΔMNP este obtuzunghic.







2. Desenează un triunghi ABC și notează cu G punctul de intersecție a medianelor AM, BN și CP. Calculează:

a) AG și AM, dacă $GM = 3$ cm; **b)** GN și BN, dacă $BG = 4$ cm; **c)** PG și CG, dacă $PC = 15$ cm.

3. Construiește un triunghi ABC, știind că punctul G este centrul de greutate al triunghiului, $AB = 8$ cm, $AG = 6$ cm și $BG = 4$ cm. Explică pașii parcurși pentru construirea triunghiului.

4. Se dă un triunghi ABC și un punct D pe latura BC, astfel încât triunghiurile ABD și ACD să aibă aceeași arie (să fie echivalente). Demonstrează că AD este mediană în triunghiul ABC.

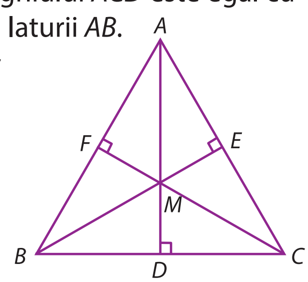
5. În triunghiul ABC, punctul D este mijlocul laturii BC. Fie E simetricul punctului A față de punctul D și F mijlocul segmentului BE. Știind că aria triunghiului ABC este egală cu $72\ cm^2$, calculează aria triunghiului BDF.

6. Dreapta AD este mediana corespunzătoare laturii BC a unui triunghi ABC ($D \in BC$). Știind că $BC = 10$ cm, perimetrul triunghiului ABD este egal cu 18 cm, perimetrul triunghiului ACD este egal cu 16 cm și perimetrul triunghiului ABC este egal cu 24 cm, calculează lungimea laturii AB.

7. În figura alăturată, segmentele AD și BE sunt înălțimi ale triunghiului ABC ($D \in BC$, $E \in AC$) și M este punctul lor de intersecție. Dacă $MA = MB = MC$, demonstrează că:

a) punctele D și E sunt mijloacele laturilor BC, respectiv AC;

b) punctele C, M și F sunt coliniare, unde F este mijlocul laturii AB.



AUTOEVALUARE

10 min

1. Dacă apreciezi că afirmația este adevărată, încercuiește litera A. În caz contrar, încercuiește litera F. **4,5 puncte**

a) Punctul de intersecție a medianelor unui triunghi este centrul de greutate al triunghiului. **A F**

b) Într-un triunghi dreptunghic, centrul de greutate este mijlocul ipotenuzei. **A F**

c) Centrul de greutate al unui triunghi se află pe fiecare mediană la două treimi de bază și o treime de vârf. **A F**

2. Încercuiește litera corespunzătoare răspunsului corect. Se consideră un triunghi ABC și se notează cu G centrul de greutate al triunghiului. Dreapta AG intersectează latura BC în punctul M. **3 puncte**

a) Dacă $AM = 18$ cm, lungimea segmentului AG este egală cu: **A.** 6 cm; **B.** 12 cm; **C.** 18 cm; **D.** 9 cm.

b) Dacă $GM = 4$ cm, lungimea segmentului AM este egală cu: **A.** 8 cm; **B.** 4 cm; **C.** 12 cm; **D.** 6 cm.

3. Completează caseta cu răspunsul corect. **1,5 puncte**

În triunghiul ABC, M este mijlocul laturii AC și G este centrul de greutate. Știind că $BM = 9$ cm, atunci lungimea segmentului BG este egală cu ☐ cm. **Din oficiu: 1 punct**

Exerciții și probleme recapitulative

1. Dacă x este măsura în grade a unui unghi, iar triunghiul MNP are $\sphericalangle MNP = 4x - 10^\circ$, $\sphericalangle MPN = 3x + 10^\circ$ și $\sphericalangle PMN = 2x$, calculează măsurile:

a) unghiurilor triunghiului PMN; **b)** unghiurilor exterioare ale triunghiului PMN.

2. Un punct M este interior unui triunghi ABC. Demonstrează că:

a) $MA + MB < AC + BC$; **b)** $\frac{1}{2}(AB + BC) + CA < MA + MB + MC < AB + BC + CA$.

3. În triunghiul dreptunghic ABC, cu $\sphericalangle A = 90^\circ$, bisectoarele unghiurilor B și C sunt concurente în punctul I. Calculează măsura unghiului CAI, suma măsurilor unghiurilor IBC și ICB și măsura unghiului BIC.

4. Calculează măsurile unghiurilor unui triunghi știind că sunt:

a) direct proporționale cu 3, 7 și 8; **b)** invers proporționale cu 3, 4 și 6.

5. Se consideră un triunghi ABC cu $\sphericalangle ABC = 110^\circ$, $\sphericalangle ACB = 30^\circ$ și înălțimile AA', $A' \in BC$ și CC', $C' \in AB$. Calculează măsurile unghiurilor $A'AB$, $C'CB$ și $A'AC$.

6. Un triunghi dreptunghic are un unghi ascuțit cu măsura de 50°. Calculează măsurile unghiurilor exterioare ale triunghiului.

7. Se consideră un triunghi ABC și AD înălțimea corespunzătoare bazei BC, $D \in BC$. Se notează cu E intersecția perpendicularei în B pe BC cu dreapta AC și se notează cu F intersecția perpendicularei în C pe BC cu dreapta AB.

a) Demonstrează că $EB \parallel AD \parallel FC$. **b)** Dacă $\sphericalangle ABC = 60^\circ$, calculează $\sphericalangle CFB$.

c) Dacă $\sphericalangle BCA = 45^\circ$, calculează $\sphericalangle AEB$.

8. Se consideră un triunghi ABC cu $\sphericalangle ABC = 45^\circ$ și $\sphericalangle BCA = 35^\circ$. Știind că AM este bisectoarea unghiului BAC, calculează măsurile unghiurilor BAC, CAM și AMB.

9. Se consideră un triunghi ABC și se notează cu D și E mijloacele laturilor AB, respectiv AC. Știind că $BE \cap CD = \{G\}$ și $AG \cap BC = \{O\}$, arată că $BO = CO$.

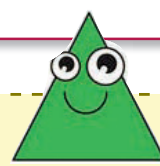
10. Se consideră un triunghi ABC cu $\sphericalangle ABC = 40^\circ$ și $\sphericalangle ACB = 80^\circ$. Dacă CD este bisectoarea unghiului ACB ($D \in AB$), calculează măsurile unghiurilor BAC, ADC și CDB.

11. Medianele AD, BE și CF ale triunghiului ABC sunt concurente în punctul G. Calculează:

a) GD, dacă $AG = 24$ cm; **b)** BG, dacă $GE = 6$ cm; **c)** GF și CG, dacă $CF = 12$ cm.

12. Se notează cu O mijlocul unui segment AB și se notează cu d perpendiculara în punctul O pe dreapta AB. Se notează cu C un punct oarecare de pe dreapta d, diferit de punctul O, și cu D simetricul punctului C față de dreapta AB. Demonstrează că:

a) dreapta AB este mediatoarea segmentului CD; **b)** $AC = BC = BD = DA$.



Proiect

• Elevii clasei se împart în șapte grupe. Fiecare grupă va construi (pe hârtie cartonată/pe calculator) liniile importante în triunghi: bisectoarea, mediatoarea, înălțimea, mediana, punând în evidență punctele de intersecție a acestora, în următoarele situații:

– **grupa 1:** pentru triunghiul ascuțitunghic scalen;
– **grupa 2:** pentru triunghiul ascuțitunghic isoscel;
– **grupa 3:** pentru triunghiul obtuzunghic isoscel;
– **grupa 4:** pentru triunghiul obtuzunghic scalen;
– **grupa 5:** pentru triunghiul dreptunghic scalen;
– **grupa 6:** pentru triunghiul dreptunghic isoscel;
– **grupa 7:** pentru triunghiul echilateral.

• Fiecare grupă va alege un reprezentant care să prezinte proiectul în fața colegilor.

EVALUARE

Timp de lucru: 50 de minute.

Subiectul I. Dacă apreciezi că afirmația este adevărată, completează căsuța alăturată cu litera A. În caz contrar, completează cu litera F.

(5p) **1.** Un unghi adiacent și suplementar cu unul dintre unghiurile unui triunghi se numește unghi exterior. ☐

(5p) **2.** Triunghiul care are laturile de lungimi diferite se numește triunghi scalen. ☐

(5p) **3.** Construcția unui triunghi când se cunoaște lungimea unei laturi și măsurile unghiurilor alăturate laturii respective este posibilă totdeauna. ☐

(5p) **4.** Orice vârf al unui triunghi se află pe mediatoarea laturii opuse vârfului respectiv. ☐

Subiectul II. Unește, prin săgeți, fiecare cifră corespunzătoare enunțurilor din coloana **A** cu litera care indică răspunsul corect, aflat în coloana **B**.

	A	B
(5p)	**1.** Semidreapta ale cărei puncte sunt egal depărtate de două laturi ale unui triunghi este ...	**a)** o înălțime a triunghiului;
(5p)	**2.** Perpendiculara dintr-un vârf al unui triunghi pe dreapta determinată de latura opusă este ...	**b)** o mediană a triunghiului;
(5p)	**3.** Perpendiculara pe mijlocul unei laturi a unui triunghi este ...	**c)** mediatoarea unei laturi a triunghiului;
(5p)	**4.** Segmentul determinat de un vârf al unui triunghi și mijlocul laturii opuse este ...	**d)** bisectoarea unuia dintre unghiurile triunghiului;
		e) o dreaptă care nu are puncte comune cu triunghiul.

Subiectul III. Alege litera care indică singura variantă corectă.

(5p) **1.** Intersecția medianelor unui triunghi se numește:
A. ortocentru; **B.** centru de greutate; **C.** centrul cercului înscris; **D.** centrul cercului circumscris.

(5p) **2.** Intersecția înălțimilor unui triunghi se numește:
A. ortocentru; **B.** centru de greutate; **C.** centrul cercului înscris; **D.** centrul cercului circumscris.

(5p) **3.** Intersecția mediatoarelor unui triunghi se numește:
A. ortocentru; **B.** centru de greutate; **C.** centrul cercului înscris; **D.** centrul cercului circumscris.

(5p) **4.** Intersecția bisectoarelor unui triunghi se numește:
A. ortocentru; **B.** centru de greutate; **C.** centrul cercului înscris; **D.** centrul cercului circumscris.

La subiectul IV scrie rezolvarea completă.

Subiectul IV. În triunghiul ABC, BM este bisectoarea unghiului ABC, $M \in AC$, și BN este bisectoarea unghiului ABM, $N \in AM$. Dacă $NP \perp BC$, $P \in BC$, $NP \cap BM = \{O\}$, $\sphericalangle MBC = 30°$, $\sphericalangle BMA = 80°$, calculează măsurile unghiurilor:

(30p) **a)** BAC; **b)** CNP; **c)** MON.

Se acordă 10 puncte din oficiu. Nota se obține împărțind punctajul final la 10.

Subiectul	I.1	I.2	I.3	I.4	II.1	II.2	II.3	II.4	III.1	III.2	III.3	III.4	IV.a	IV.b	IV.c
Punctajul															
Nota															

VI.2. CONGRUENȚA TRIUNGHIURILOR

VI.2.1. Congruența triunghiurilor oarecare. Criterii de congruență a triunghiurilor

Rezolvăm, observăm și descoperim cunoștințe noi

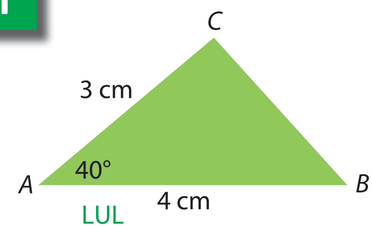
Lucrare practică 1

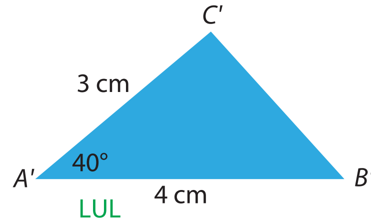
Construiește pe o coală de hârtie colorată un triunghi *ABC*, folosind cazul de construcție LUL ($AB = 4$ cm, $\sphericalangle A = 40°$, $AC = 3$ cm). Decupează triunghiul cu ajutorul unei foarfeci. Repetă lucrarea pe o coală de hârtie de altă culoare. Suprapune cele două triunghiuri decupate. Ce observi?

Rezolvare: Ai obținut două triunghiuri *ABC* și *A'B'C'* de culori diferite, care prin suprapunere coincid, deci sunt figuri congruente.

Observații:

1. Lipește în caiet cele două triunghiuri congruente și de culori diferite; notează în dreptul lor dimensiunile și cazul de construcție folosit, ca în figura alăturată.
2. Rezultatul lucrării practice îl putem exprima astfel: Oricare ar fi două triunghiuri *ABC* și *A'B'C'*, dacă $AB \equiv A'B'$, $\sphericalangle A \equiv \sphericalangle A'$ și $AC \equiv A'C'$, atunci $\Delta ABC \equiv \Delta A'B'C'$.





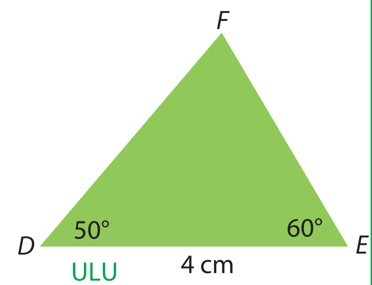
Lucrare practică 2

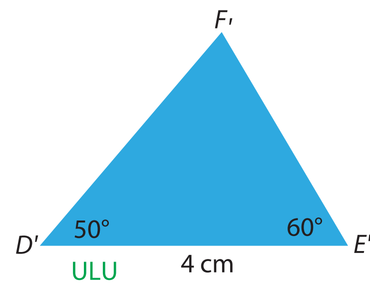
Construiește pe o coală de hârtie colorată un triunghi *DEF*, folosind cazul de construcție ULU ($DE = 4$ cm, $\sphericalangle D = 50°$, $\sphericalangle E = 60°$). Decupează triunghiul cu ajutorul unei foarfeci. Repetă lucrarea pe o coală de hârtie de altă culoare. Suprapune cele două triunghiuri decupate. Ce observi?

Rezolvare: Ai obținut două triunghiuri *DEF* și *D'E'F'* de culori diferite, care prin suprapunere coincid, deci sunt figuri congruente.

Observații:

1. Lipește în caiet cele două triunghiuri congruente și de culori diferite; notează în dreptul lor dimensiunile și cazul de construcție folosit, ca în figura alăturată.
2. Rezultatul lucrării practice îl putem exprima astfel: Oricare ar fi două triunghiuri *DEF* și *D'E'F'*, dacă $\sphericalangle D \equiv \sphericalangle D'$, $DE \equiv D'E'$ și $\sphericalangle E \equiv \sphericalangle E'$, atunci $\Delta DEF \equiv \Delta D'E'F'$.





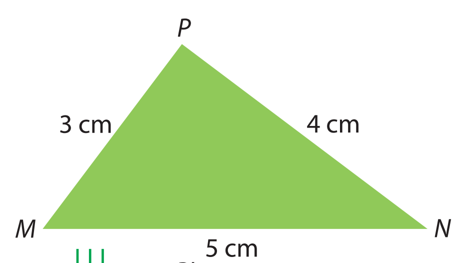
Lucrare practică 3

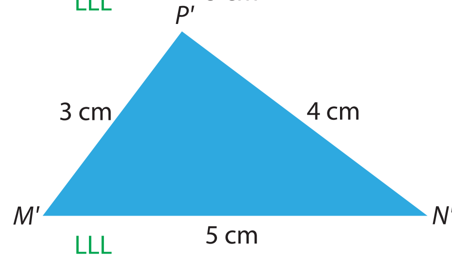
Construiește pe o coală de hârtie colorată un triunghi *MNP*, folosind cazul de construcție LLL ($MN = 5$ cm, $NP = 4$ cm și $PM = 3$ cm). Decupează triunghiul cu ajutorul unei foarfeci. Repetă lucrarea pe o coală de hârtie de altă culoare. Suprapune cele două triunghiuri decupate. Ce observi?

Rezolvare: Ai obținut două triunghiuri *MNP* și *M'N'P'* de culori diferite, care prin suprapunere coincid, deci sunt figuri congruente.

Observații:

1. Lipește în caiet cele două triunghiuri congruente și de culori diferite; notează în dreptul lor dimensiunile și cazul de construcție folosit, ca în figura alăturată.
2. Rezultatul lucrării practice îl putem exprima astfel: Oricare ar fi două triunghiuri *MNP* și *M'N'P'*, dacă $MN \equiv M'N'$, $NP \equiv N'P'$ și $MP \equiv M'P'$, atunci $\Delta MNP \equiv \Delta M'N'P'$.





Reține!

- Două triunghiuri se numesc **triunghiuri congruente** dacă au laturile și unghiurile respectiv congruente.

  ▸ Triunghiurile ABC și $A'B'C'$, în care $AB \equiv A'B'$, $BC \equiv B'C'$, $AC \equiv A'C'$, $\sphericalangle A \equiv \sphericalangle A'$, $\sphericalangle B \equiv \sphericalangle B'$, $\sphericalangle C \equiv \sphericalangle C'$ se numesc **triunghiuri congruente**. Scriem $\Delta ABC \equiv \Delta A'B'C'$ și citim „triunghiul ABC este congruent cu triunghiul $A'B'C'$".

  ▸ Perechile de laturi congruente, respectiv perechile de unghiuri congruente se numesc **laturi omoloage**, respectiv **unghiuri omoloage**.

- **Criterii de congruență a triunghiurilor**

▸ Criteriul LUL (latură–unghi–latură)	Două triunghiuri care au două laturi și unghiul determinat de acestea respectiv congruente sunt congruente. Dacă $AB \equiv A'B'$, $\sphericalangle A \equiv \sphericalangle A'$ și $AC \equiv A'C'$, atunci $\Delta ABC \equiv \Delta A'B'C'$.
▸ Criteriul ULU (unghi–latură–unghi)	Două triunghiuri care au câte o latură și unghiurile alăturate acesteia respectiv congruente sunt congruente. Dacă $\sphericalangle D \equiv \sphericalangle D'$, $DE \equiv D'E'$, $\sphericalangle E \equiv \sphericalangle E'$, atunci $\Delta DEF \equiv \Delta D'E'F'$.
▸ Criteriul LLL (latură–latură–latură)	Două triunghiuri care au laturile respectiv congruente sunt congruente. Dacă $MN \equiv M'N'$, $NP \equiv N'P'$ și $MP \equiv M'P'$, atunci $\Delta MNP \equiv \Delta M'N'P'$.

Observații:

1. În rezolvarea problemelor, pentru a dovedi congruența triunghiurilor este suficient să dovedim congruența a trei dintre cele șase elemente ale triunghiului, folosindu-ne de criteriile de congruență: LUL, ULU, LLL.
2. În scrierea congruenței a două triunghiuri trebuie să fim atenți la ordinea literelor; astfel, literele care reprezintă vârfurile unghiurilor congruente trebuie să ocupe aceeași poziție (același loc) în scrierea denumirilor celor două triunghiuri a căror congruență trebuie dovedită.

Exersează, fixează și aprofundează cunoștințele

1. Din congruența triunghiurilor ABC și MNP rezultă congruențe de laturi și de unghiuri omoloage. Scrie toate congruențele posibile.

2. În figura 1, $AB \cap CD = \{O\}$, $AO \equiv BO$ și $CO \equiv DO$. Demonstrează că $\Delta AOC \equiv \Delta BOD$.

3. În figura 2 se știe că $AC \equiv AD$ și $BC \equiv BD$. Demonstrează că $\Delta ABC \equiv \Delta ABD$.

4. În figura 3 se știe că $\sphericalangle ABC \equiv \sphericalangle FDE$ și $BG \equiv DH$. Demonstrează că $\Delta BDG \equiv \Delta DBH$.

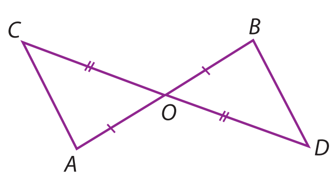


Fig. 1

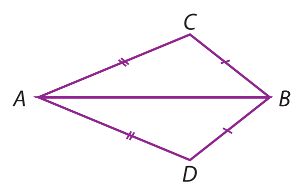


Fig. 2

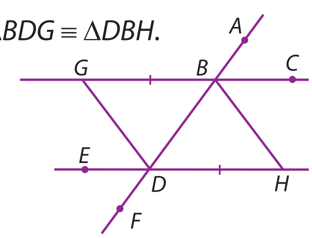


Fig. 3

5. În figura 4, O este mijlocul segmentului AB, $AC \equiv BD$ și $\sphericalangle MAC \equiv \sphericalangle NBD$. Demonstrează că $OC \equiv OD$.

6. În figura 5 se știe că $AB \equiv DC$ și $\sphericalangle ABC \equiv \sphericalangle DCB$. Demonstrează că $\sphericalangle BAC \equiv \sphericalangle CDB$.

7. În figura 6 se știe că $\sphericalangle FAC \equiv \sphericalangle EDB$, $\sphericalangle FCA \equiv \sphericalangle EBD$ și $AB \equiv DC$. Demonstrează că $\sphericalangle AFC \equiv \sphericalangle DEB$.

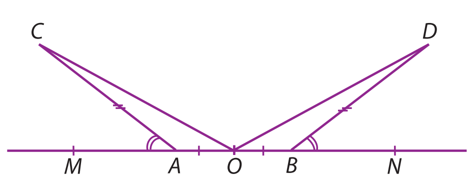


Fig. 4

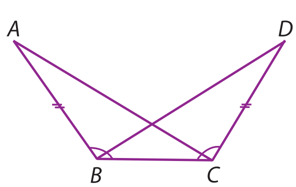


Fig. 5

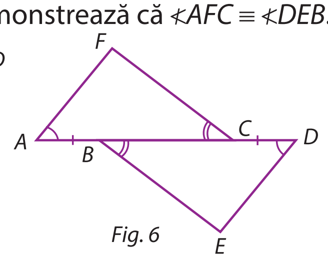


Fig. 6

8. Triunghiul ABC are proprietatea: $\Delta ABC \equiv \Delta BCA$.

a) Stabilește natura triunghiului ABC. **b)** Calculează $\sphericalangle A + \frac{1}{2} \cdot \sphericalangle B + \frac{1}{3} \cdot \sphericalangle C$.

9. Triunghiul ABC are proprietatea: $\Delta ABC \equiv \Delta ACB$.

a) Stabilește natura triunghiului ABC.

b) Calculează perimetrul triunghiului ABC, știind că $2 \cdot AB + BC = 20$ cm.

AUTOEVALUARE

10 min

1. Încercuiește litera corespunzătoare răspunsului corect. **3 punct**

Se consideră două triunghiuri ABC și MNP.

a) Dacă cele două triunghiuri sunt congruente, iar perechile de unghiuri $\sphericalangle A$ și $\sphericalangle P$, respectiv $\sphericalangle C$ și $\sphericalangle M$ sunt unghiuri omoloage, atunci este corectă scrierea:

A. $\Delta BAC \equiv \Delta NPM$; **B.** $\Delta BAC \equiv \Delta PNM$; **C.** $\Delta ABC \equiv \Delta NPM$; **D.** $\Delta BAC \equiv \Delta MPN$.

b) Dacă $\Delta ABC \equiv \Delta MNP$, $\sphericalangle A = 65°$ și $\sphericalangle N = 75°$, atunci:

A. $\sphericalangle P = 75°$; **B.** $\sphericalangle P = 65°$; **C.** $\sphericalangle P = 40°$; **D.** $\sphericalangle P = 140°$.

2. Unește, prin săgeți, fiecare enunț aflat în coloana din stânga cu răspunsul corespunzător aflat în coloana din dreapta. **4,5 puncte**

Dacă $\Delta ABC \equiv \Delta KLM$, $AB = 6$ cm, $AC = 8$ cm, $BC = 10$ cm, atunci:

a) $KL = ...$	**1)** 8 cm;
b) $KM = ...$	**2)** 10 cm;
c) $\mathscr{P}_{\Delta KLM} = ...$	**3)** 6 cm;
	4) 24 cm.

3. Completează spațiul punctat cu răspunsul corect. **1,5 puncte**

Dacă $\Delta ABC \equiv \Delta BCA$ și $AB = 6$ cm, atunci media aritmetică a lungimilor laturilor triunghiului este egală cu ... cm.

Din oficiu: 1 punct

VI.2.2. CRITERII DE CONGRUENȚĂ A TRIUNGHIURILOR DREPTUNGHICE

Rezolvăm, observăm și descoperim cunoștințe noi

1. a) Scrie cazul de congruență LUL pentru triunghiuri dreptunghice și exemplifică-l.

b) Scrie cazul de congruență ULU pentru triunghiuri dreptunghice și exemplifică-l.

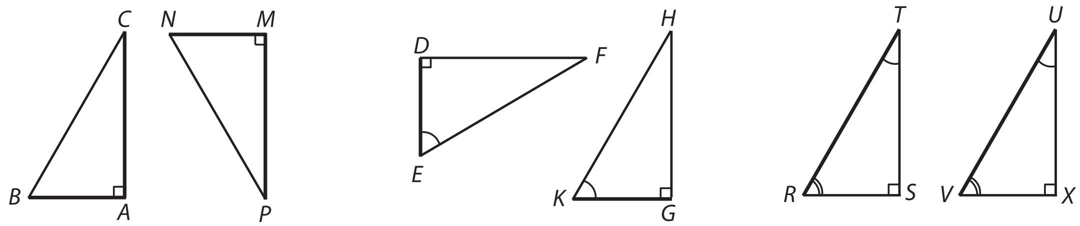
***Rezolvare*:**

Două triunghiuri dreptunghice au unghiurile drepte congruente (fiecare are măsura de 90°). Din acest motiv, pentru stabilirea congruenței între două triunghiuri dreptunghice, este suficient să identificăm, conform cazurilor de congruență a triunghiurilor oarecare, doar două congruențe între elementele lor, din care o congruență între două laturi.

a) Cazul LUL pentru triunghiuri dreptunghice devine cazul CC (catetă–catetă): dacă $AB \equiv MN$ și $AC \equiv MP$, atunci $\Delta ABC \equiv \Delta MNP$.

b) Cazul ULU pentru triunghiuri dreptunghice devine:

- CU (catetă–unghi): dacă $DE \equiv GK$ și $\sphericalangle DEF \equiv \sphericalangle GKH$, atunci $\Delta DEF \equiv \Delta GKH$;
- IU (ipotenuză–unghi): dacă $RT \equiv VU$ și $\sphericalangle RTS \equiv \sphericalangle VUX$, atunci $\Delta RTS \equiv \Delta VUX$.



2. a) Construiește pe o coală de hârtie colorată un triunghi dreptunghic cu lungimea ipotenuzei de 3 cm și lungimea unei catete de 2 cm.

b) Numește criteriul de construcție folosit.

c) Repetă construcția pe o coală de hârtie de altă culoare. Decupează cele două triunghiuri de culori diferite și suprapune-le. Ce observi?

***Rezolvare*:**

a) Construim un unghi drept *XOY* (figura 1).

Pe semidreapta *OX* a acestui unghi drept, luăm segmentul *OA* = 2 cm (figura 2).

Luăm între vârfurile compasului 3 cm și cu vârful compasului în *A* trasăm un arc de cerc care intersectează semidreapta *OY* într-un punct pe care-l notăm cu *B* (figura 3).

Unim punctele *A* și *B*. Am construit triunghiul dreptunghic *AOB*, cu $\sphericalangle O = 90°$, *AO* = 2 cm și *AB* = 3 cm (figura 4).

b) Criteriul de construcție poate fi numit IC (ipotenuză–catetă).

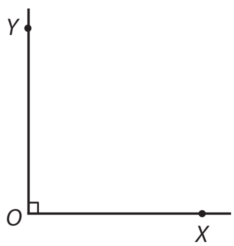


Fig. 1

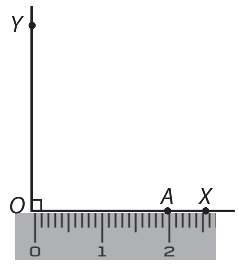


Fig. 2

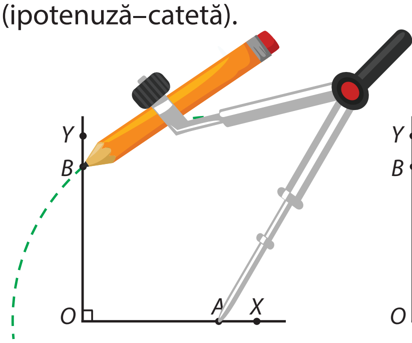


Fig. 3

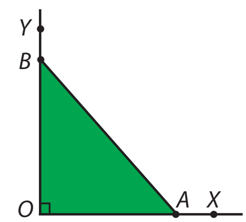


Fig. 4

c) Repetând construcția pe o coală de hârtie de altă culoare, decupând triunghiurile obținute și suprapunându-le, observăm că ele coincid și, ca urmare, sunt congruente.

Observații:

- Din rezolvarea problemei 2 putem deduce că un triunghi dreptunghic poate fi construit cunoscând doar lungimea unei catete și a ipotenuzei.
- Suprapunând triunghiurile construite la punctele a) și c), am obținut triunghiuri congruente. Ca urmare, cazul de construcție IC poate fi considerat caz de congruență.

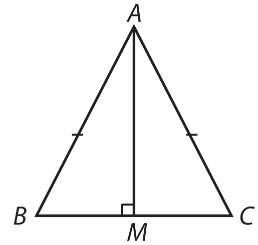
Reține!

- **Criterii de congruență a triunghiurilor dreptunghice**

▸ Criteriul CC (catetă–catetă)	Dacă două triunghiuri dreptunghice au catetele respectiv congruente, atunci triunghiurile sunt congruente.
▸ Criteriul CU (catetă–unghi)	Dacă două triunghiuri dreptunghice au câte o catetă și câte un unghi ascuțit respectiv congruente, atunci triunghiurile sunt congruente.
▸ Criteriul IC (ipotenuză–catetă)	Dacă două triunghiuri dreptunghice au ipotenuzele și câte o catetă respectiv congruente, atunci triunghiurile sunt congruente.
▸ Criteriul IU (ipotenuză–unghi)	Dacă două triunghiuri dreptunghice au ipotenuzele și câte un unghi ascuțit respectiv congruente, atunci triunghiurile sunt congruente.

Aplicăm cunoștințele

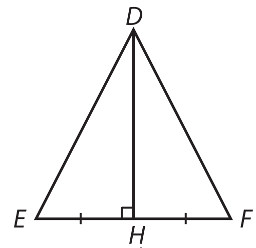
1. În triunghiul isoscel ABC ($AB = AC$) se construiește înălțimea AM ($AM \perp BC$, $M \in BC$). Arată că $\Delta ABM \equiv \Delta ACM$.



***Rezolvare*:**

Triunghiurile ABM și ACM sunt dreptunghice deoarece $AM \perp BC$. Cum $AB = AC$ (din ipoteză) și $AM = AM$ (latură comună), din cazul de congruență IC rezultă că $\Delta ABM \equiv \Delta ACM$.

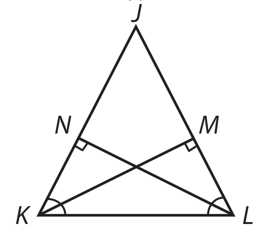
2. În triunghiul DEF se știe că $DH \perp EF$, ($H \in EF$) și $HE = HF$. Arată că $\Delta DEH \equiv \Delta DFH$.



***Rezolvare*:**

Triunghiurile DEH și DFH sunt dreptunghice deoarece $DH \perp EF$. Cum $HE = HF$ (din ipoteză) și $DH = DH$ (latură comună), din cazul de congruență CC rezultă că $\Delta DEH \equiv \Delta DFH$.

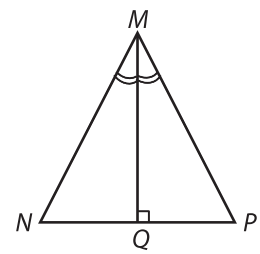
3. În triunghiul JKL se știe că $\sphericalangle JLK = \sphericalangle JKL$, $KM \perp JL$ și $LN \perp JK$. Arată că $\Delta LMK \equiv \Delta KNL$.



***Rezolvare*:**

Triunghiurile LMK și KNL sunt dreptunghice deoarece $KM \perp JL$ și $LN \perp JK$. Cum $\sphericalangle JLK \equiv \sphericalangle JKL$ (din ipoteză) și $KL = KL$ (latură comună), din cazul de congruență IU rezultă că $\Delta LMK \equiv \Delta KNL$.

4. În triunghiul MNP se știe că MQ este bisectoarea unghiului NMP și înălțimea corespunzătoare bazei NP. Demonstrează că $\Delta MNQ \equiv \Delta MPQ$.



***Rezolvare*:**

Triunghiurile MNQ și MPQ sunt dreptunghice deoarece MQ este înălțime ($MQ \perp NP$). Cum MQ este bisectoarea unghiului NMP, rezultă că $\sphericalangle NMQ \equiv \sphericalangle PMQ$ (1). Dar $MQ = MQ$ (latură comună celor două triunghiuri) (2). Din (1), (2) și cazul de congruență CU rezultă că $\Delta MNQ \equiv \Delta MPQ$.

Exersează, fixează și aprofundează cunoștințele

1. Se consideră un triunghi ABC dreptunghic în A și se notează cu B' și C' simetricele punctelor B și C față de punctul A. Demonstrează că $\Delta ABC \equiv \Delta AB'C'$.

2. Se consideră triunghiul ABC dreptunghic în A, cu $\sphericalangle ABC = 45°$. Se construiește înălțimea AD ($D \in BC$) corespunzătoare bazei BC. Arată că $\Delta ABD \equiv \Delta ACD$.

3. Se consideră un triunghi ABC ascuțitunghic isoscel, cu $AB = AC$. Perpendicularele în punctul A pe laturile AB și AC intersectează dreapta BC în punctele E, respectiv F. Știind că $BE \equiv CF$, arată că $\Delta ABE \equiv \Delta ACF$.

4. Punctul P este interior segmentului MN. Se construiește perpendiculara în punctul P pe dreapta MN, pe care se consideră, de aceeași parte a dreptei MN, punctele O și Q, astfel încât $OP = MP$ și $QP = NP$. Arată că $\Delta MQP \equiv \Delta ONP$.

5. În triunghiul ABC se construiesc înălțimile BE ($E \in AC$) și CF ($F \in AB$). Se notează cu H ortocentrul triunghiului ABC. Știind că $HE \equiv HF$, demonstrează că:

a) $\Delta BHF \equiv \Delta CHE$; **b)** $\Delta AHF \equiv \Delta AHE$.

6. Se consideră triunghiul isoscel ABC, cu $AB \equiv AC$. Construim prin punctul B paralela la dreapta AC și o notăm cu d. Construim $AE \perp d$, $E \in d$ și $CF \perp AB$, $F \in AB$. Arată că $\Delta ABE \equiv \Delta CAF$.

7. Se consideră un triunghi ABC dreptunghic isoscel, cu $\sphericalangle A = 90°$ și $AB = AC$. Prin punctul A se construiește o dreaptă a și se notează cu E și F picioarele perpendicularelor din B și C pe dreapta a. Arată că $\Delta ABE \equiv \Delta CAF$.

8. Se consideră un triunghi dreptunghic ABC, cu $\sphericalangle A = 90°$, $AB = 3$ cm și $AC = 2$ cm. Pe semidreapta BA se ia un punct E, astfel încât $BE = 5$ cm, iar pe semidreapta AC se ia un punct F, astfel încât $CF = 1$ cm. Arată că $\Delta ABC \equiv \Delta AFE$.

AUTOEVALUARE

10 min

1. Încercuiește litera corespunzătoare răspunsului corect. **3 puncte**

Se consideră triunghiurile dreptunghice ABC și MNP.

a) Dacă $\sphericalangle A = \sphericalangle M = 90°$, $CB = NP$ și $\sphericalangle C \equiv \sphericalangle N$, atunci:

A. $\Delta ABC \equiv \Delta MNP$; **B.** $\Delta ABC \equiv \Delta MPN$; **C.** $\Delta ABC \equiv \Delta PNM$; **D.** $\Delta ABC \equiv \Delta NPM$.

b) Dacă $\sphericalangle A = \sphericalangle P = 90°$, $AB \equiv PM$ și $BC \equiv MN$, atunci:

A. $\Delta ABC \equiv \Delta PNM$; **B.** $\Delta ABC \equiv \Delta PMN$; **C.** $\Delta ABC \equiv \Delta MNP$; **D.** $\Delta ABC \equiv \Delta NPM$.

2. Unește, prin săgeți, fiecare enunț aflat în coloana din stânga cu răspunsul corespunzător aflat în coloana din dreapta. **4,5 puncte**

Dacă $\Delta TSV \equiv \Delta RHK$, $\sphericalangle T = 90°$ și $\sphericalangle S = 30°$, atunci:

a) $\sphericalangle K = ...$	1) 45°;
b) $\sphericalangle H = ...$	2) 90°;
c) $\sphericalangle R = ...$	3) 60°;
	4) 30°.

3. Completează spațiile punctate cu răspunsul corect. **1,5 puncte**

Se consideră un triunghi dreptunghic. Laturile care formează unghiul drept se numesc ..., iar latura care se opune unghiului drept se numește ... .

Din oficiu: 1 punct

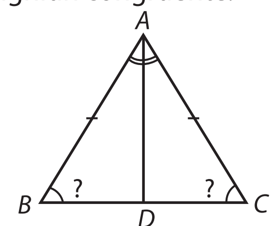
VI.2.3. METODA TRIUNGHIURILOR CONGRUENTE. APLICAȚII: PROPRIETATEA PUNCTELOR DE PE BISECTOAREA UNUI UNGHI ȘI DE PE MEDIATOAREA UNUI SEGMENT

Rezolvăm, observăm și descoperim cunoștințe noi

Se consideră un triunghi și se fac următoarele afirmații:

1. triunghiul este isoscel; **2.** triunghiul are două unghiuri congruente.

Demonstrează că cele două afirmații sunt echivalente.



Rezolvare:

1. Demonstrăm că „dacă un triunghi este isoscel, atunci el are unghiurile de la bază congruente".

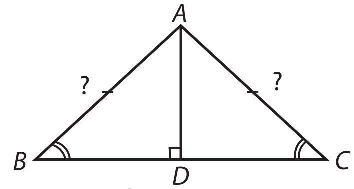
Ipoteza: ΔABC, $AB \equiv AC$. *Concluzia:* $\sphericalangle ABC \equiv \sphericalangle ACB$.

Demonstrație: Construim AD – bisectoarea unghiului BAC, $D \in BC$.

Stabilim congruențe între elementele triunghiurilor ABD și ACD: $\begin{cases} AB \equiv AC \text{ (din ipoteză)} \\ \sphericalangle BAD \equiv \sphericalangle CAD \text{ (din construcție)} \\ AD \equiv AD \text{ (latură comună)} \end{cases}$.

Conform cazului de congruență LUL, cele două triunghiuri sunt congruente, adică $\Delta ABD \equiv \Delta ACD$.

Conform definiției triunghiurilor congruente rezultă că: $\sphericalangle ADB \equiv \sphericalangle ADC$, $BD \equiv CD$ și $\sphericalangle ABD \equiv \sphericalangle ACD$, adică $\sphericalangle ABC \equiv \sphericalangle ACB$ (ceea ce trebuia arătat).



2. Demonstrăm că „dacă într-un triunghi unghiurile de la bază sunt congruente, atunci triunghiul este isoscel".

Ipoteza: ΔABC, $\sphericalangle ABC \equiv \sphericalangle ACB$.

Concluzia: $AB \equiv AC$.

Demonstrație:

Din $\sphericalangle ABC \equiv \sphericalangle ACB$ rezultă că unghiurile ABC și ACB nu pot fi obtuze (un triunghi are cel mult un unghi obtuz).

Construim perpendiculara din A pe BC și notăm cu D piciorul perpendicularei. Triunghiurile ABD și ACD sunt dreptunghice. Stabilim congruențe între elementele triunghiurilor dreptunghice ABD și ACD: $\begin{cases} \sphericalangle ABD \equiv \sphericalangle ACD \text{ (din ipoteză și } D \in BC) \\ AD = AD \text{ (latură comună)} \end{cases}$.

Conform cazului de congruență CU, cele două triunghiuri sunt congruente, adică $\Delta ABD \equiv \Delta ACD$.
Conform definiției triunghiurilor congruente rezultă că: $\sphericalangle BAD \equiv \sphericalangle CAD$, $BD \equiv CD$ și $AB \equiv AC$ (ceea ce trebuia arătat).

Observații:

1. Cele două afirmații sunt echivalente deoarece din prima afirmație, prin demonstrație, a rezultat cea de-a doua și reciproc, din a doua afirmație, prin demonstrație, a rezultat prima.

2. Demonstrațiile anterioare se bazează pe metoda numită „metoda triunghiurilor congruente".

3. Din rezolvarea problemei anterioare rezultă două teoreme:
   - Dacă un triunghi este isoscel, atunci el are unghiurile de la bază congruente.
   - Dacă un triunghi are două unghiuri congruente, atunci triunghiul este isoscel.

Despre fiecare dintre cele două teoreme se spune că este *reciproca* celeilalte și le putem enunța printr-o singură teoremă astfel:

- Un triunghi este isoscel dacă și numai dacă are două unghiuri congruente.

Folosind simboluri și notații matematice, teorema anterioară poate fi scrisă și astfel:

- Oricare ar fi un triunghi ABC, $AB \equiv AC \Leftrightarrow \sphericalangle B \equiv \sphericalangle C$.

Reține!

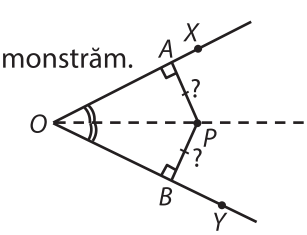
- Pentru a demonstra că două segmente sau două unghiuri sunt congruente, se folosește metoda triunghiurilor congruente.
- **Metoda triunghiurilor congruente** presupune următorul raționament:
  – identificarea a două triunghiuri care conțin ca elemente laturile sau unghiurile căutate;
  – încadrarea într-un caz de congruență (LUL, ULU, LLL sau CC, CU, IC, IU);
  – folosirea definiției triunghiurilor congruente, din care rezultă că toate elementele celor două triunghiuri sunt respectiv congruente, adică și congruența segmentelor sau congruența unghiurilor cerută în problemă.

Aplicăm cunoștințele

1. Demonstrează teorema: Un punct este situat pe bisectoarea unui unghi dacă și numai dacă este egal depărtat de laturile unghiurilor.

Rezolvare:

Scriem teorema din enunț sub forma a două teoreme reciproce, pe care le demonstrăm.



Teorema directă: dacă punctul P se află pe bisectoarea unghiului XOY, atunci punctul P este egal depărtat de laturile unghiului.

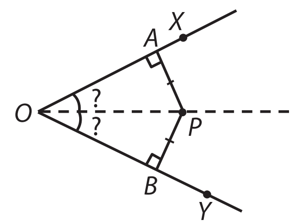
Ipoteză: $\sphericalangle XOY$, $\sphericalangle XOP \equiv \sphericalangle YOP$, $PA \perp OX$, $A \in OX$; $PB \perp OY$, $B \in OY$.

Concluzia: $PA \equiv PB$.

Demonstrație:
Folosim metoda triunghiurilor congruente.
Identificăm triunghiurile *AOP* și *BOP* care conțin laturile *PA*, respectiv *PB* și precizăm congruențele:

$$\left.\begin{array}{l} \sphericalangle AOP \equiv \sphericalangle BOP \text{ (din ipoteză)} \\ OP \equiv OP \text{ (latură comună)} \\ \sphericalangle OAP \equiv \sphericalangle OBP \text{ (au } 90^\circ \text{ fiecare)} \end{array}\right\} \overset{\text{IU}}{\Rightarrow} \Delta AOP \equiv \Delta BOP \Rightarrow PA \equiv PB.$$

Teorema reciprocă: dacă *P* este un punct interior unghiului *XOY*, egal depărtat de laturile sale, atunci punctul *P* se află pe bisectoarea acestuia.

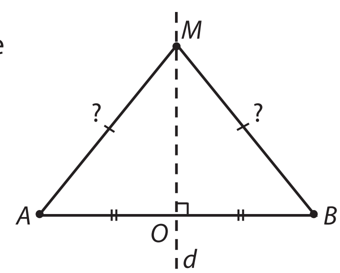


Ipoteza: $\sphericalangle XOY$, $P \in \text{Int}(\sphericalangle XOY)$, $PA \perp OX$, $A \in OX$; $PB \perp OY$, $B \in OY$, $PA = PB$.
Concluzia: $\sphericalangle AOP \equiv \sphericalangle BOP$.
Demonstrație:
Folosim metoda triunghiurilor congruente.
Identificăm triunghiurile *AOP* și *BOP* care conțin unghiurile *AOP*, respectiv *BOP* și precizăm congruențele:

$$\left.\begin{array}{l} \sphericalangle OAP \equiv \sphericalangle OBP \text{ (au } 90^\circ \text{ fiecare)} \\ OP \equiv OP \text{ (latură comună)} \\ PA \equiv PB \text{ (din ipoteză)} \end{array}\right\} \overset{\text{IC}}{\Rightarrow} \Delta AOP \equiv \Delta BOP \Rightarrow \sphericalangle AOP \equiv \sphericalangle BOP.$$

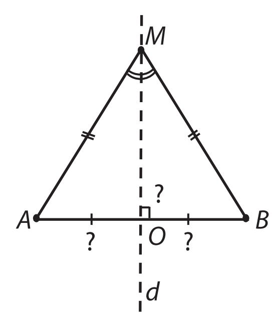
2. Demonstrează teorema: Un punct este situat pe mediatoarea unui segment dacă și numai dacă este egal depărtat de capetele segmentului.

Rezolvare:
Scriem teorema din enunț sub forma a două teoreme reciproce, pe care le demonstrăm.



Teorema directă: dacă un punct este situat pe mediatoarea unui segment, atunci el este egal depărtat de capetele segmentului.
Ipoteza: $d \perp AB$, $d \cap AB = \{O\}$, $AO \equiv BO$, $M \in d$.
Concluzia: $MA \equiv MB$.
Demonstrație:
Folosim metoda triunghiurilor congruente.
Identificăm triunghiurile *AOM* și *BOM* care conțin laturile *MA*, respectiv *MB* și precizăm congruențele:

$$\left.\begin{array}{l} AO \equiv BO \text{ (din ipoteză)} \\ MO \equiv MO \text{ (latură comună)} \\ \sphericalangle AOM \equiv \sphericalangle BOM \text{ (} d \perp AB \text{ şi } M \in d \text{)} \end{array}\right\} \overset{\text{CC}}{\Rightarrow} \Delta AOM \equiv \Delta BOM \Rightarrow MA \equiv MB.$$



Teorema reciprocă: dacă un punct *M* este egal depărtat de capetele unui segment, atunci punctul *M* se află pe mediatoarea segmentului respectiv.
Ipoteza: $MA \equiv MB$.
Concluzia: $AO \equiv BO$ și $MO \perp AB$.
Demonstrație:
Construim bisectoarea unghiului *AMB* și notăm cu *O* intersecția acesteia cu latura *AB*. Folosim metoda triunghiurilor congruente.
Identificăm triunghiurile *AOM* și *BOM* care conțin laturile *AO*, respectiv *BO* și unghiurile *AOM*, respectiv *BOM*. Precizăm congruențele:

$$\left.\begin{array}{l} MA \equiv MB \text{ (ipoteză)} \\ \sphericalangle AMO \equiv \sphericalangle BMO \text{ (din construcţie)} \\ MO \equiv MO \text{ (latură comună)} \end{array}\right\} \overset{\text{LUL}}{\Rightarrow} \Delta AOM \equiv \Delta BOM \Rightarrow AO \equiv BO \text{ și}$$

$\sphericalangle AOM \equiv \sphericalangle BOM$. Cum $\sphericalangle AOM + \sphericalangle BOM = \sphericalangle AOB = 180^\circ$, rezultă că $\sphericalangle AOM = \sphericalangle BOM = 90^\circ$, adică $MO \perp AB$. Cum *MO* este perpendiculară pe *AB* și conține mijlocul segmentului *AB*, rezultă că *MO* este mediatoarea segmentului *AB*.

Reține!

- **Proprietatea punctelor de pe bisectoarea unui unghi:** Un punct este situat pe bisectoarea unui unghi dacă și numai dacă este egal depărtat de laturile unghiului.
- **Proprietatea punctelor de pe mediatoarea unui segment:** Un punct este situat pe mediatoarea unui segment dacă și numai dacă este egal depărtat de capetele segmentului.

Exersează, fixează și aprofundează cunoștințele

1. Se consideră un segment AB și cercurile $\mathcal{C}_1$ de centru A și rază r, respectiv $\mathcal{C}_2$ de centru B și rază r, secante în punctele C și D. Demonstrează că semidreapta:
a) AB este bisectoarea unghiului CAD; **b)** BA este bisectoarea unghiului CBD;
c) CD este bisectoarea unghiului ACB; **d)** DC este bisectoarea unghiului ADB.

2. În triunghiul isoscel ABC ($AB = AC$) considerăm punctele D și E situate pe laturile AB, respectiv AC, astfel încât $BD \equiv CE$. Demonstrează că: **a)** $BE \equiv CD$; **b)** $\sphericalangle CEB \equiv \sphericalangle BDC$.

3. Se consideră triunghiul isoscel ABC ($AB = AC$) și $\sphericalangle A < 90°$. Perpendicularele construite în punctul A pe laturile AB și AC intersectează dreapta BC în punctele M și N. Demonstrează că triunghiul AMN este isoscel.

4. Se consideră cercurile concentrice $\mathcal{C}_1(O, r)$ și $\mathcal{C}_2(O, R)$ cu $R > r$. Pe cercul $\mathcal{C}_2$ se iau punctele A, B și C, astfel încât $\sphericalangle AOB \equiv \sphericalangle COB$. Dacă cercul $\mathcal{C}_1$ intersectează semidreptele OA și OB în punctele D, respectiv E, demonstrează că $\Delta ABD \equiv \Delta BCE$.

5. Se consideră un unghi XOY și un punct A pe bisectoarea acestuia. Se notează cu B și C picioarele perpendicularelor din A pe laturile unghiului ($B \in OX$ și $C \in OY$). Calculează lungimea segmentului BC, știind că: **a)** $AB = 8$ cm și $\mathcal{P}_{\Delta ABC} = 28$ cm; **b)** $AC = 12$ cm și $\mathcal{P}_{\Delta ABC} = 40$ cm.

6. Fie C un punct situat pe mediatoarea segmentului AB, $C \notin AB$. Calculează lungimea segmentului AB, știind că: **a)** $AC = 14$ cm și $\mathcal{P}_{\Delta ABC} = 38$ cm; **b)** $BC = 27$ cm și $\mathcal{P}_{\Delta ABC} = 93$ cm.

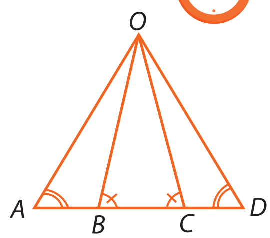
AUTOEVALUARE

10 min

1. Dacă apreciezi că afirmația este adevărată, încercuiește litera A. În caz contrar, încercuiește litera F. **3 puncte**

Observă figura alăturată, unde punctele A, B, C și D sunt coliniare și $AB \equiv CD$. Dacă $\sphericalangle OAB \equiv \sphericalangle ODC$ și $\sphericalangle OBC \equiv \sphericalangle OCB$, atunci:

a) $OB \equiv OD$; **A F** **b)** $OA \equiv OD$; **A F** **c)** $\sphericalangle AOB \equiv \sphericalangle DOC$. **A F**



2. Unește, prin săgeți, fiecare enunț aflat în coloana din stânga cu răspunsul corespunzător aflat în coloana din dreapta. **3 puncte**

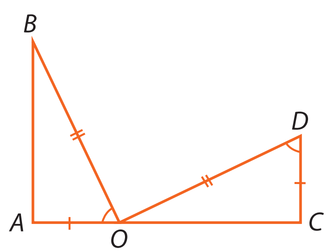
Se consideră un triunghi ABC.

a) Dacă $\Delta ABC \equiv \Delta ACB$ și $\sphericalangle A = 30°$, atunci ...
b) Dacă $\Delta ABC \equiv \Delta ACB$ și $\sphericalangle A = 60°$, atunci ...
c) Dacă $\Delta ABC \equiv \Delta ACB$ și $\sphericalangle A = 70°$, atunci ...

1) $AB \equiv AC \equiv BC$ și $\sphericalangle A \equiv \sphericalangle B \equiv C$;
2) $AB \equiv AC$ și $\sphericalangle B = 55°$;
3) $AB \equiv AC$ și $\sphericalangle C = 75°$;
4) $AB \equiv AC$ și $\sphericalangle B = 70°$.

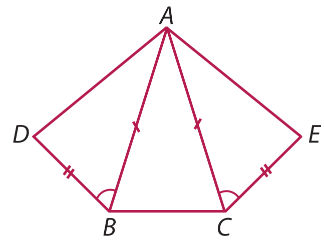
3. Completează spațiul punctat cu răspunsul corect. **3 puncte**

În figura alăturată, punctul O se află pe segmentul AC, dreptele AB și CD sunt paralele, iar $BA \perp AO$, $DC \perp CO$. Dacă $AO \equiv CD$, $\sphericalangle AOB \equiv \sphericalangle CDO$ și $BO \equiv OD$, atunci măsura unghiului BOD este egală cu ...°.



Din oficiu: 1 punct

Exerciții și probleme recapitulative



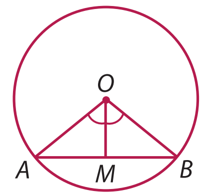
1. În figura alăturată, triunghiul ABC este isoscel cu baza BC, $BD \equiv CE$ și $\sphericalangle ABD \equiv \sphericalangle ACE$. Demonstrează că:

a) $AD \equiv AE$; **b)** $\sphericalangle BAD \equiv \sphericalangle CAE$; **c)** $\sphericalangle ADB \equiv \sphericalangle AEC$.

2. Se consideră un triunghi ABC cu $\sphericalangle A = 90°$ și se notează cu D simetricul punctului C față de punctul A. Demonstrează că:

a) triunghiul CBD este isoscel;

b) semidreapta BA este bisectoarea unghiului CBD.

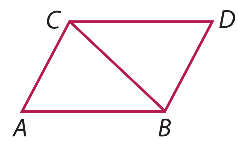


3. Se consideră un cerc $\mathscr{C}(O, r = OA)$ și semidreapta OM este bisectoarea unghiului AOB. Demonstrează că:

a) $AM \equiv BM$; **b)** $OM \perp AB$.

4. În interiorul unui unghi AOB se află două puncte C și D, astfel încât fiecare este egal depărtat de laturile unghiului. Demonstrează că punctele O, C și D sunt coliniare.

5. Se consideră un segment AB și perpendicularele MA și NB pe AB ($MA \perp AB$, $NB \perp AB$). Dacă $MA \equiv NB$, demonstrează că $\Delta MAB \equiv \Delta NBA$.



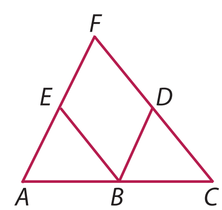
6. În figura alăturată se știe că $\Delta ABC \equiv \Delta DCB$. Demonstrează că:

a) $AC \parallel BD$; **b)** $AB \parallel CD$.

7. Demonstrează că dacă două triunghiuri dreptunghice au aceeași arie și o pereche de catete congruente, atunci ele sunt congruente.

8. Se consideră un triunghi ABC și se notează cu D simetricul punctului A față de mijlocul segmentului BC. Demonstrează că:

a) $AB \equiv CD$; **b)** $AB \parallel CD$; **c)** $BD \equiv AC$; **d)** $BD \parallel AC$.

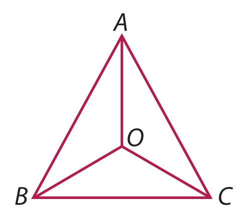


9. În figura alăturată se știe că $\Delta ABE \equiv \Delta CBD$ și $\sphericalangle BAE = 60°$. Dacă punctele A, B, C sunt coliniare:

a) demonstrează că $AB \equiv CB$;

b) calculează măsura unghiului EFD.

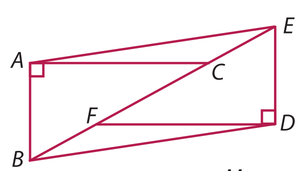
10. Se consideră un triunghi ABC și se notează cu D simetricul punctului B față de punctul C. Dacă $\Delta ACD \equiv \Delta ACB$, demonstrează că triunghiul ABC este dreptunghic.



11. În figura alăturată, unghiurile AOB, BOC și COA, în jurul punctului O, sunt congruente. Dacă segmentele OA, OB și OC sunt congruente, demonstrează că triunghiul ABC este echilateral.

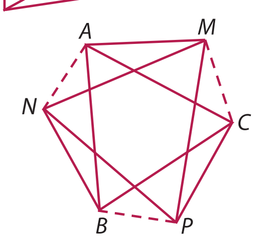
12. Se consideră un triunghi ABC și se notează cu I punctul de intersecție a bisectoarelor unghiurilor ABC și ACB. Dacă $BI \equiv CI$, demonstrează că triunghiul ABC este isoscel, cu $AB \equiv AC$.

13. Pe mediatoarea unui segment AB se consideră punctele C și D, situate de o parte și de alta a dreptei AB. Știind că $AC \parallel BD$, demonstrează că dreapta AB este mediatoarea segmentului CD.



14. În figura alăturată se știe că $AB \perp AC$, $DE \perp DF$ și punctele B, F, C, E sunt coliniare. Dacă $BF \equiv CE$ și $DF \equiv AC$, demonstrează că:

a) $\Delta ABC \equiv \Delta DEF$; **b)** $\sphericalangle ACE \equiv \sphericalangle DFB$; **c)** $AE \equiv DB$.



15. Triunghiul ABC din figura alăturată este echilateral, $MA \perp AB$, $NB \perp BC$, $PC \perp AC$ și $AM \equiv BN \equiv CP$. Demonstrează că:

a) $\Delta CAM \equiv \Delta ABN$;

b) $\Delta CAM \equiv \Delta BCP$;

c) $MN \equiv NP \equiv PM$.

EVALUARE

Timp de lucru: 50 de minute.

Subiectul I. Dacă apreciezi că afirmația este adevărată, completează căsuța alăturată cu litera A. În caz contrar, completează cu litera F.

(5p) **1.** Dacă $\Delta ABC \equiv \Delta LMN$, atunci $\sphericalangle BCA \equiv \sphericalangle NML$. ☐

(5p) **2.** Dacă $\Delta ABC \equiv \Delta MNP$ și triunghiul ABC este echilateral, atunci și triunghiul MNP este echilateral. ☐

(5p) **3.** Bisectoarele unghiurilor ABC și BAC ale triunghiului ABC se intersectează în punctul I. Distanțele de la punctul I la laturile triunghiului sunt: d(I, AB) = IM, d(I, BC) = IN și d(I, AC) = IP. Dacă $IM + IN = 5$ cm, atunci $IP = 5$ cm. ☐

(5p) **4.** Mediatoarele laturilor AB și AC ale triunghiului ABC se intersectează în punctul O. Dacă $OC = 3{,}5$ cm, atunci $OA + OB = 7$ cm. ☐

Subiectul II. Unește, prin săgeți, fiecare cifră corespunzătoare enunțurilor din coloana **A**, cu litera care indică răspunsul corect aflat în coloana **B**.

Se consideră un unghi ascuțit AOB și OM bisectoarea lui. Se iau două puncte P și Q, punctul P aparține semidreptei OA și punctul Q aparține semidreptei OB. Precizează ce caz de congruență se folosește dacă dorim să demonstrăm că $\Delta MOP \equiv \Delta MOQ$, în fiecare dintre cazurile prezentate mai jos.

	A	B
(5p)	**1.** $PO \equiv QO$	**a)** CC;
(5p)	**2.** $\sphericalangle OMP \equiv \sphericalangle OMQ$	**b)** LUL;
(5p)	**3.** $MP \perp OA$ și $MQ \perp OB$	**c)** CU;
(5p)	**4.** P, M, Q sunt coliniare și $OM \perp PQ$	**d)** ULU;
		e) IU.

Subiectul III. La cerințele următoare alege litera care indică singura variantă corectă.

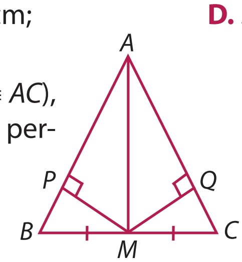
(5p) **1.** Fie M un punct pe mediatoarea segmentului AB. Dacă punctul M nu se află pe segmentul AB și $MA < AB$, atunci triunghiul MAB este:
A. scalen; **B.** dreptunghic; **C.** isoscel; **D.** echilateral.

(5p) **2.** Fie OP bisectoarea unghiului AOB. Construim $PM \perp OA$, $M \in OA$ și $PN \perp OB$, $N \in OB$. Dacă $PM = 6$ cm, $\mathscr{P}_{\Delta MNP} = 22$ cm și $\mathscr{P}_{\Delta MON} = 30$ cm, atunci triunghiul MON este:
A. scalen; **B.** dreptunghic; **C.** echilateral; **D.** isoscel.

(5p) **3.** Se consideră un triunghi ABC cu $\sphericalangle A > 90°$. Mediatoarele laturilor AB și AC intersectează latura BC în punctele E, respectiv F. Dacă $\mathscr{P}_{\Delta AEF} = 10$ cm, atunci lungimea laturii BC este egală cu:
A. 5 cm; **B.** 15 cm; **C.** 10 cm; **D.** 20 cm.

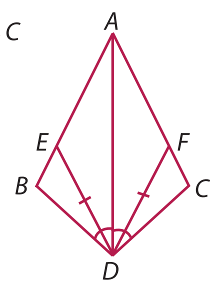
(5p) **4.** Fie OA bisectoarea unui unghi XOY. Perpendiculara în punctul A pe bisectoarea OA intersectează laturile unghiului în punctele B și C. Dacă $AB = 9$ cm și $CO = 15$ cm, atunci perimetrul triunghiului BOC este egal cu:
A. 39 cm; **B.** 48 cm; **C.** 33 cm; **D.** 51 cm.

La subiectele IV și V scrie rezolvările complete.



Subiectul IV. În figura alăturată, triunghiul ABC este isoscel ($AB \equiv AC$), punctul M este mijlocul laturii BC, iar punctele P și Q sunt picioarele perpendicularelor din M pe laturile AB și AC. Demonstrează că:

(5p) **a)** $\sphericalangle BAM \equiv \sphericalangle CAM$;
(5p) **b)** $MP \equiv MQ$;
(5p) **c)** $\Delta AMP \equiv \Delta AMQ$.



Subiectul V. În figura alăturată se știe că $\sphericalangle BDA \equiv \sphericalangle CDA$, $DE \equiv DF$ și semidreptele DE, respectiv DF sunt bisectoarele unghiurilor BDA și CDA. Demonstrează că:

(5p) **a)** $\sphericalangle EAD \equiv \sphericalangle FAD$;
(5p) **b)** $\sphericalangle BED \equiv \sphericalangle CFD$;
(5p) **c)** $BE \equiv CF$.

Se acordă 10 puncte din oficiu. Nota se obține împărțind punctajul final la 10.

Subiectul	I.1	I.2	I.3	I.4	II.1	II.2	II.3	II.4	III.1	III.2	III.3	III.4	IV.a	IV.b	IV.c	V.a	V.b	V.c
Punctajul																		
Nota																		

VI.3. TRIUNGHIURI PARTICULARE

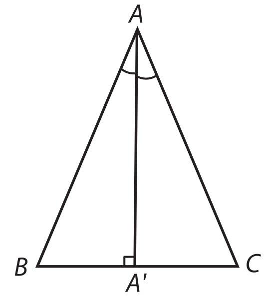
VI.3.1. Proprietăți ale triunghiului isoscel

Observăm și descoperim cunoștințe noi

1. În triunghiul ABC, AA' este bisectoare și înălțime.

a) Demonstrează că triunghiul ABC este isoscel.

b) Ce poți spune despre triunghiul în care o bisectoare este și înălțime?



***Rezolvare*:**

a) *Ipoteza:* ΔABC, $\sphericalangle BAA' \equiv \sphericalangle CAA'$, $\sphericalangle BA'A = \sphericalangle CA'A = 90°$.

Concluzia: $AB \equiv AC$.

Demonstrație:

Identificăm triunghiurile ABA' și ACA' care conțin laturile AB și AC.

$$\left.\begin{array}{l} \sphericalangle BAA' \equiv \sphericalangle CAA' \text{ (din ipoteză)} \\ \sphericalangle BA'A \equiv \sphericalangle CA'A\ (=90°) \\ AA' \equiv AA' \text{ (latură comună)} \end{array}\right\} \overset{\text{CU}}{\Rightarrow} \Delta ABA' \equiv \Delta ACA' \Rightarrow AB \equiv AC$$

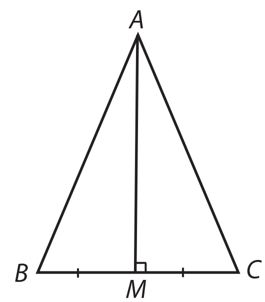
și, ca urmare, triunghiul ABC este isoscel.

b) Triunghiul în care o bisectoare este și înălțime este un triunghi isoscel.

2. În triunghiul ABC, AM este mediană și înălțime.

a) Demonstrează că triunghiul ABC este isoscel.

b) Ce poți spune despre triunghiul în care o mediană este și înălțime?



***Rezolvare*:**

a) *Ipoteza:* ΔABC, $BM \equiv CM$, $\sphericalangle AMB = \sphericalangle AMC = 90°$.

Concluzia: $AB \equiv AC$.

Demonstrație:

Identificăm triunghiurile ABM și ACM care conțin laturile AB și AC.

$$\left.\begin{array}{l} BM \equiv CM \text{ (din ipoteză)} \\ \sphericalangle AMB \equiv \sphericalangle AMC\ (=90°) \\ AM \equiv AM \text{ (latură comună)} \end{array}\right\} \overset{\text{CC}}{\Rightarrow} \Delta ABM \equiv \Delta ACM \Rightarrow AB \equiv AC$$

și, ca urmare, triunghiul ABC este isoscel.

b) Triunghiul în care o mediană este și înălțime este un triunghi isoscel.

Reține!

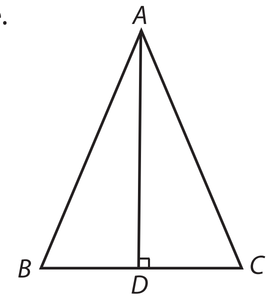
- **Proprietăți ale triunghiului isoscel**
  - Dacă un triunghi este isoscel, atunci unghiurile alăturate bazei sunt congruente.
  - Dacă un triunghi are două unghiuri congruente, atunci triunghiul este isoscel.
  - Dacă două dintre liniile importante ale unui triunghi coincid, atunci triunghiul este isoscel.
  - Bisectoarea unghiului opus bazei, mediatoarea bazei, înălțimea și mediana corespunzătoare bazei unui triunghi isoscel coincid. Fiecare dintre ele este și axă de simetrie a triunghiului.
  - Dacă mediatoarea unei laturi a unui triunghi trece printr-un vârf al triunghiului, atunci triunghiul este isoscel.
  - Dacă un triunghi este isoscel, atunci medianele corespunzătoare laturilor congruente sunt congruente.
  - Dacă un triunghi este isoscel, atunci bisectoarele unghiurilor congruente sunt congruente.
  - Dacă un triunghi este isoscel, atunci înălțimile corespunzătoare laturilor congruente sunt congruente.

Observație: Pentru a arăta că un triunghi este isoscel, este suficient să arătăm că două unghiuri sunt congruente sau că două linii importante, corespunzătoare unei laturi, coincid.

Aplicăm cunoștințele

Triunghiul ABC este isoscel cu $AB = AC$ și AD este înălțime. Demonstrează că AD este:

a) mediană; **b)** bisectoare; **c)** mediatoare.



Rezolvare:

Ipoteza: ΔABC, $AB \equiv AC$, $\sphericalangle ADB = \sphericalangle ADC = 90°$.

Concluzia: a) $BD = CD$; b) $\sphericalangle BAD \equiv \sphericalangle CAD$; c) $AD \perp BC$ și $BD = CD$.

Demonstrație: ΔABD și ΔACD conțin segmentele BD și CD.

$$\left.\begin{array}{l} AB \equiv AC \text{ (din ipoteză)} \\ AD \equiv AD \text{ (latură comună)} \\ \sphericalangle ADB \equiv \sphericalangle ADC\ (=90°) \end{array}\right\} \overset{IC}{\Rightarrow} \Delta ABD \equiv \Delta ACD \Rightarrow \begin{cases} BD \equiv CD \text{ (a)} \\ \sphericalangle BAD \equiv \sphericalangle CAD \text{ (b)} \end{cases}.$$

c) Din enunț, $AD \perp BC$ și din a) $BD = CD$, deci AD este și mediatoarea bazei triunghiului ABC.

Observație: *Bisectoarea unghiului opus bazei, mediatoarea bazei, înălțimea și mediana corespunzătoare bazei unui triunghi isoscel coincid.*

Exersează, fixează și aprofundează cunoștințele

1. Se consideră un triunghi ABC cu $AB = AC$. Știind că:
a) $\sphericalangle A = 80°$, calculează $\sphericalangle B$ și $\sphericalangle C$; **b)** $\sphericalangle B = 70°$, calculează $\sphericalangle A$ și $\sphericalangle C$; **c)** $\sphericalangle C = 50°$, calculează $\sphericalangle A$ și $\sphericalangle B$.

2. Calculează măsurile unghiurilor unui triunghi isoscel, știind că unul dintre unghiuri are măsura egală cu 40°.

3. Se consideră un triunghi ABC. Demonstrează că dacă $\sphericalangle A = 65°$ și $\sphericalangle B = 50°$, atunci triunghiul ABC este isoscel.

4. Fie triunghiul isoscel ABC cu baza AC. Calculează perimetrul triunghiului ABC, știind că:
a) $AB = 8$ cm și $AC = 6$ cm; **b)** $BC = 12$ cm și $AC = 10$ cm.

5. **Activitate pe grupe.** Fie triunghiul isoscel ABC cu $\sphericalangle A \equiv \sphericalangle B$ și perimetrul de 40 cm. Calculați lungimile laturilor triunghiului, știind că:
a) $AB = 8$ cm; **b)** $AC = 14$ cm; **c)** $BC = 12$ cm.

6. În triunghiul isoscel ABC cu $BA = BC$ se știe că AA' este bisectoarea unghiului BAC, $A' \in BC$. Calculează măsurile unghiurilor triunghiului ABC, știind că măsura unghiului BAA' este egală cu 37°.

7. În triunghiul isoscel ABC cu $AC = BC$ se construiește mediana CM, $M \in AB$. Dacă măsura unghiului ACM este egală cu 23°43', calculează măsurile unghiurilor triunghiului ABC.

8. Se consideră un triunghi isoscel MNP cu $MN = MP$ și un punct Q pe latura NP. Știind că mediatoarea laturii NQ intersectează latura MN în punctul R, demonstrează că $RQ \parallel MP$.

9. În triunghiul isoscel ABC, cu vârful în A, se construiește $MN \parallel BC$, $M \in AB$ și $N \in AC$. Demonstrează că AMN este isoscel, analizând toate cazurile posibile.

10. Se consideră un triunghi dreptunghic isoscel MNP cu $MN = MP$ și un punct Q pe latura PN, diferit de mijlocul segmentului PN. Perpendiculara în punctul Q pe latura PN intersectează laturile MN și MP în punctele R și S. Demonstrează că $PN = QR + QS$.

11. Fie triunghiul isoscel ABC cu $AB = AC$. Se notează cu D și E simetricele punctelor A față de B, respectiv B față de C, iar cu G se notează intersecția dreptelor DC și AE. Demonstrează că triunghiul GEC este isoscel.

AUTOEVALUARE

10 min

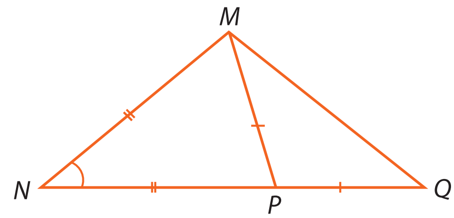
1. Încercuiește litera corespunzătoare răspunsului corect. **3 puncte**

a) În triunghiul isoscel ABC, $AB = 2$ cm și $AC = 6$ cm. Dacă $\mathscr{P}$ este perimetrul triunghiului ABC, atunci:

A. $\mathscr{P} = 10$ cm; B. $\mathscr{P} < 10$ cm;
C. $\mathscr{P} > 14$ cm; D. $\mathscr{P} = 14$ cm.

b) În figura alăturată se știe că $NM \equiv NP$ și $PM \equiv PQ$. Dacă $\sphericalangle MNP = 40°$, atunci măsura unghiului PQM este egală cu:

A. 40°; B. 70°;
C. 45°; D. 35°.



2. Unește, prin săgeți, fiecare enunț aflat în coloana din stânga cu răspunsul corespunzător aflat în coloana din dreapta. **4,5 puncte**

Se consideră un triunghi isoscel ABC cu $AB = AC$ și un punct A' pe latura BC.

a) Dacă AA' este bisectoarea unghiului BAC, atunci măsura unghiului $AA'C$ este egală cu ...
b) Dacă AA' este înălțime și $\sphericalangle BAC = 70°$, atunci măsura unghiului BAA' este egală cu ...
c) Dacă AA' este mediană și $\sphericalangle CAA' = 25°$, atunci măsura unghiului BAC este egală cu ...

1) 90°;
2) 50°;
3) 30°;
4) 35°.

3. Completează spațiul punctat cu răspunsul corect. **1,5 puncte**

Dacă mediatoarea unei laturi a unui triunghi trece printr-un vârf al triunghiului, atunci triunghiul este ... .

Din oficiu: 1 punct

VI.3.2. PROPRIETĂȚI ALE TRIUNGHIULUI ECHILATERAL

Rezolvăm, observăm și descoperim cunoștințe noi

1. Dacă un triunghi isoscel are un unghi cu măsura de 60°, atunci triunghiul este echilateral.

***Demonstrație*:**

Cazul I: Triunghiul ABC este isoscel cu $\sphericalangle B = \sphericalangle C$ și $\sphericalangle A = 60°$.

Calculăm $\sphericalangle B = \sphericalangle C = (180° - \sphericalangle A) : 2 = (180° - 60°) : 2 = 120° : 2 = 60°$. Deci $\sphericalangle B = \sphericalangle C = \sphericalangle A = 60°$.

Cazul II: Triunghiul ABC este isoscel cu $\sphericalangle B = \sphericalangle C$ și $\sphericalangle B = 60°$.

Calculăm $\sphericalangle A = 180° - (\sphericalangle B + \sphericalangle C) = 180° - (60° + 60°) = 180° - 120° = 60°$. Deci $\sphericalangle A = \sphericalangle B = \sphericalangle C = 60°$.

În concluzie, dacă oricare dintre unghiurile unui triunghi isoscel are măsura de 60°, rezultă că și celelalte unghiuri au măsura de 60°, adică triunghiul este echilateral.

2. Dacă un triunghi este echilateral, atunci bisectoarea oricărui unghi, înălțimea, mediatoarea și mediana corespunzătoare laturii opuse acelui unghi coincid.

***Demonstrație*:**

Fie triunghiul ABC echilateral cu $AB = AC = BC$.

Din $AB = AC$ și proprietățile triunghiului isoscel rezultă că bisectoarea unghiului A, înălțimea, mediatoarea și mediana corespunzătoare laturii BC coincid.

Din $AC = BC$ și proprietățile triunghiului isoscel rezultă că bisectoarea unghiului C, înălțimea, mediatoarea și mediana corespunzătoare laturii AB coincid.

Din $AB = BC$ și proprietățile triunghiului isoscel rezultă că bisectoarea unghiului B, înălțimea, mediatoarea și mediana corespunzătoare laturii AC coincid.

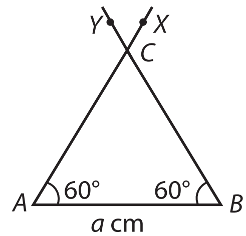
Deci, într-un triunghi echilateral, bisectoarea oricărui unghi, înălțimea, mediatoarea și mediana corespunzătoare laturii opuse acelui unghi coincid.

3. Descrie procedeul de construcție a unui triunghi echilateral cu lungimea laturii de a cm.

***Rezolvare*:**

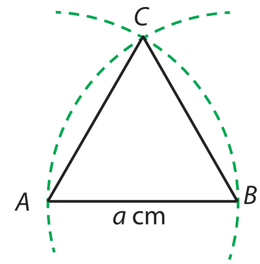
a) Construcția triunghiului echilateral cu ajutorul riglei gradate și a raportorului

- Cu ajutorul riglei, construim un segment AB, cu $AB = a$ cm.
- Cu ajutorul raportorului, construim semidreptele AX și BY, astfel încât $\sphericalangle XAB = 60°$ și $\sphericalangle YBA = 60°$.
- Notăm cu C intersecția celor două semidrepte.
- Triunghiul determinat de punctele A, B, C este triunghiul echilateral ABC, cu lungimea laturii a.



b) Construcția triunghiului echilateral cu ajutorul riglei gradate și a compasului

- Cu ajutorul riglei, construim un segment AB, cu $AB = a$ cm.
- Stabilim între vârfurile compasului lungimea laturii AB și construim cercul cu centrul în punctul A și raza de a cm.
- Construim cercul cu centrul în punctul B și raza de a cm.
- Notăm cu C unul dintre punctele de intersecție a celor două cercuri.
- Triunghiul determinat de punctele A, B, C este triunghiul echilateral ABC, cu lungimea laturii de a cm.



Aplicăm cunoștințele

Se consideră un triunghi echilateral ABC pe laturile căruia se iau punctele $M \in AB$, $N \in BC$ și $P \in AC$, astfel încât $AM \equiv BN \equiv CP$. Demonstrează că triunghiul MNP este echilateral.

***Rezolvare*:**

Ipoteza: ΔABC, $AB \equiv BC \equiv AC$; $M \in AB$, $N \in BC$, $P \in AC$, $AM \equiv BN \equiv CP$.

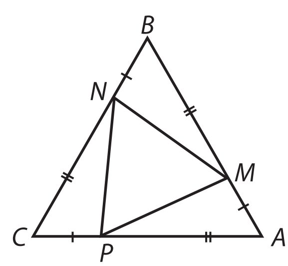
Concluzia: $MN \equiv NP \equiv PM$.

Demonstrație:

Din $AB = BC = CA$ și $AM = BN = CP$ rezultă că $AB - AM = BC - BN = AC - CP$, adică $BM = CN = AP$ (1).

Identificăm triunghiurile BMN și CNP care conțin laturile MN și NP.

$$\left.\begin{array}{l} BM \equiv CN \text{ (din (1))} \\ \sphericalangle MBN \equiv \sphericalangle NCP \ (=60°) \\ BN \equiv CP \text{ (din ipoteză)} \end{array}\right\} \overset{LUL}{\Rightarrow} \Delta BMN \equiv \Delta CNP \Rightarrow MN \equiv NP \ (2).$$



Analog se arată că $\Delta CNP \equiv \Delta APM$ și $NP \equiv PM$ (3).

Din (2) și (3) rezultă că $MN \equiv NP \equiv PM$, adică triunghiul MNP este echilateral.

Reține!

- **Proprietăți ale triunghiului echilateral**
  - Dacă un triunghi are toate unghiurile congruente, atunci triunghiul este echilateral.
  - Dacă un triunghi are două unghiuri cu măsura egală cu 60°, atunci triunghiul este echilateral.
  - Dacă un triunghi isoscel are un unghi cu măsura egală cu 60°, atunci triunghiul este echilateral.
  - Dacă un triunghi este echilateral, atunci toate unghiurile triunghiului sunt congruente, fiecare având măsura de 60°.
  - Într-un triunghi echilateral, bisectoarea oricărui unghi, înălțimea, mediatoarea și mediana corespunzătoare laturii opuse acelui unghi coincid.
  - Într-un triunghi echilateral, centrul cercului înscris, ortocentrul, centrul cercului circumscris și centrul de greutate coincid.

Exersează, fixează și aprofundează cunoștințele

1. Construiește un triunghi echilateral ABC cu lungimea laturii egală cu 3,5 cm, folosind cazul de construcție:
a) LUL; **b)** ULU; **c)** LLL.

2. Un triunghi echilateral și unul isoscel au același perimetru. Știind că latura triunghiului echilateral este egală cu 8 cm și lungimea bazei triunghiului isoscel este egală cu 6 cm, calculează lungimile laturilor congruente ale triunghiului isoscel.

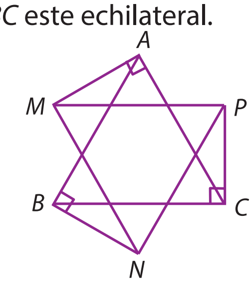
3. Se consideră un punct O interior segmentului MN. De aceeași parte a dreptei MN se construiesc triunghiurile echilaterale MOP și NOQ. Demonstrează că:
a) $MP \parallel OQ$; **b)** $PO \parallel NQ$.

4. Fie MQ bisectoarea unghiului M al triunghiului echilateral MNP, $Q \in NP$. Se construiește paralela prin punctul Q la dreapta MN, care intersectează latura MP în punctul R. Știind că $MQ \cap NR = \{S\}$, calculează măsurile unghiurilor triunghiurilor:
a) MNS; **b)** MSR; **c)** NRQ.

5. Pe latura AB a triunghiului echilateral ABC se consideră un punct D. Se construiesc: paralela DE la AC, $E \in BC$, și paralela DF la BC, $F \in AC$.
a) Calculează perimetrul triunghiului ABC, știind că $\mathscr{P}_{\Delta ADF} = 18$ cm și $\mathscr{P}_{\Delta BDE} = 36$ cm.
b) Calculează perimetrul triunghiului ADF, știind că $\mathscr{P}_{\Delta ABC} = 45$ cm și $\mathscr{P}_{\Delta BDE} = 27$ cm.

6. Se consideră un triunghi ascuțitunghic isoscel ABC, cu $AB = AC$, și se notează cu H piciorul perpendicularei din vârful B pe latura AC. Știind că $BC = 2 \cdot AH$, arată că triunghiul ABC este echilateral.

7. În figura alăturată, triunghiul ABC este echilateral. Se construiesc perpendicularele $MA \perp AC$, $NB \perp BA$ și $PC \perp CB$, astfel încât $AM = BN = CP$ și $AM < AB$. Arată că triunghiul MNP este echilateral.



8. Se consideră un triunghi echilateral ABC și punctele A', B', C' pe dreptele AB, BC, CA, astfel încât B este între A și A', C este între B și B', A este între C și C' și $BA' = CB' = AC'$. Demonstrează că triunghiul $A'B'C'$ este echilateral.

9. Fie triunghiul echilateral ABC. Se notează cu A', B', C' simetricele vârfurilor triunghiului față de laturile BC, AC, respectiv AB. Știind că perimetrul triunghiului ABC este egal cu 18 cm, calculează perimetrul triunghiului $A'B'C'$.

AUTOEVALUARE

10 min

1. Dacă apreciezi că afirmația este adevărată, încercuiește litera A. În caz contrar, încercuiește litera F. **4,5 puncte**
a) Dacă un triunghi are un unghi cu măsura de 60°, atunci triunghiul este echilateral. **A F**
b) Dacă un triunghi are două unghiuri cu măsura de 60°, atunci triunghiul este echilateral. **A F**
c) Dacă un triunghi isoscel are un unghi exterior cu măsura de 120°, atunci triunghiul este echilateral. **A F**

2. Încercuiește litera corespunzătoare răspunsului corect. **3 puncte**
a) Orice triunghi echilateral este:
A. obtuzunghic; **B.** dreptunghic; **C.** ascuțitunghic; **D.** dreptunghic isoscel.
b) Perimetrul unui triunghi echilateral cu lungimea laturii egală cu 6,(3) cm este egal cu:
A. 2,1 cm; **B.** 18,9 cm; **C.** 19 cm; **D.** 20 cm.

3. Completează spațiul punctat cu răspunsul corect. **1,5 puncte**
Se consideră triunghiul echilateral ABC și se notează cu D simetricul punctului A față de dreapta BC. Măsura unghiului ABD este egală cu ...°.
Din oficiu: 1 punct

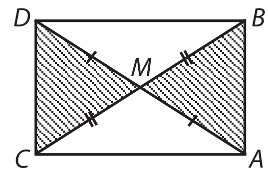
Proiect

Demonstrează că următoarele afirmații sunt adevărate.
a) Dacă două bisectoare ale unui triunghi sunt și înălțimi, atunci triunghiul este echilateral.
b) Dacă două mediane ale unui triunghi sunt și înălțimi, atunci triunghiul este echilateral.
c) Dacă două bisectoare ale unui triunghi sunt și mediane, atunci triunghiul este echilateral.
Adaugă demonstrațiile tale la portofoliul personal.

VI.3.3. Proprietăți ale triunghiului dreptunghic. Teorema lui Pitagora

Rezolvăm, observăm și descoperim cunoștințe noi

1. Demonstrează următoarea **teoremă**: Dacă un triunghi este dreptunghic, atunci lungimea medianei corespunzătoare ipotenuzei este jumătate din lungimea ipotenuzei.



Ipoteza: ΔABC, $\sphericalangle A = 90°$; $M \in BC$, $BM = CM$. *Concluzia:* $AM = \dfrac{BC}{2}$.

Demonstrație:
Construim simetricul punctului A față de punctul M și-l notăm cu D.
Identificăm în triunghiurile ABM și DCM următoarele congruențe:

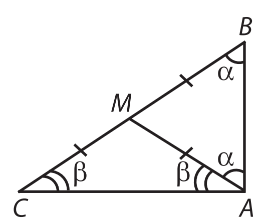
$$\left.\begin{array}{l} BM \equiv CM \text{ (din ipoteză)} \\ \sphericalangle AMB \equiv \sphericalangle DMC \text{ (opuse la vârf)} \\ AM \equiv DM \text{ (din construcție)} \end{array}\right\} \overset{\text{LUL}}{\Rightarrow} \Delta ABM \equiv \Delta DCM \Rightarrow AB \equiv DC\ (1),\ \sphericalangle ABM \equiv \sphericalangle DCM\ (2).$$

În ΔABC avem: $\sphericalangle ABC + \sphericalangle ACB = 90° \Rightarrow \sphericalangle ABM + \sphericalangle ACM = 90° \overset{(2)}{\Rightarrow} \sphericalangle DCM + \sphericalangle ACM = 90° \Rightarrow \sphericalangle DCA = 90°$.
Identificăm în triunghiurile ABC și CDA următoarele congruențe:

$$\left.\begin{array}{l} AB \equiv DC \text{ (din demonstrația (1))} \\ AC \equiv CA \text{ (latură comună)} \\ \sphericalangle BAC \equiv \sphericalangle DCA\ (=90°) \end{array}\right\} \overset{\text{CC}}{\Rightarrow} \Delta ABC \equiv \Delta CDA \Rightarrow BC = AD\ (3). \text{ Obținem } AM = \frac{AD}{2} \overset{(3)}{=} \frac{BC}{2}.$$

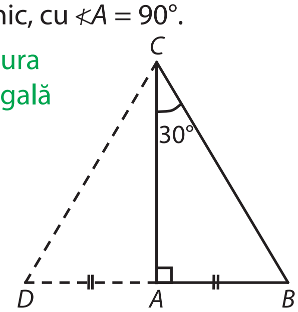
Observație: Teorema demonstrată anterior se numește teorema medianei.
Reciproca teoremei medianei: Dacă într-un triunghi lungimea medianei este jumătate din lungimea laturii pe care cade, atunci triunghiul este dreptunghic.

Ipoteza: ΔABC, $M \in BC$, $BM = CM$, $AM = \dfrac{BC}{2}$. *Concluzia:* $\sphericalangle BAC = 90°$.



Demonstrație:
Din $AM = \dfrac{BC}{2}$ rezultă că $AM = MB$ și $AM = MC$. Din $AM = MB$ rezultă că triunghiul AMB este isoscel și $\sphericalangle MAB = \sphericalangle MBA = \alpha$ (1). Din $AM = MC$ rezultă că triunghiul AMC este isoscel și $\sphericalangle MAC = \sphericalangle MCA = \beta$ (2).
În triunghiul ABC avem: $\sphericalangle A + \sphericalangle B + \sphericalangle C = 180°$, adică $\alpha + \beta + \alpha + \beta = 180°$ și obținem că $2\alpha + 2\beta = 180°$, respectiv $\alpha + \beta = 90°$. Cum $\sphericalangle BAC = \alpha + \beta = 90°$, triunghiul ABC este dreptunghic, cu $\sphericalangle A = 90°$.

2. Demonstrează următoarea **teoremă**: Într-un triunghi dreptunghic, cu măsura unui unghi egală cu 30°, lungimea catetei care se opune acestui unghi este egală cu jumătate din lungimea ipotenuzei.



Ipoteza: ΔABC, $\sphericalangle BAC = 90°$, $\sphericalangle ACB = 30°$. *Concluzia:* $AB = \dfrac{BC}{2}$.

Demonstrație:
Construim simetricul punctului B față de punctul A și-l notăm cu D.

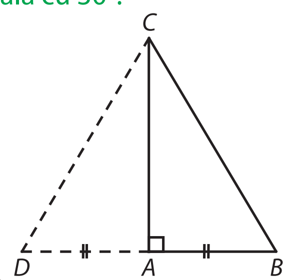
Identificăm în triunghiurile ACD și ACB următoarele congruențe:

$$\left.\begin{array}{l} AD \equiv AB \text{ (din construcţie)} \\ AC \equiv AC \text{ (latură comună)} \\ \sphericalangle DAC \equiv \sphericalangle BAC\ (\sphericalangle DAC = \sphericalangle DAB - \sphericalangle BAC = 180^\circ - 90^\circ = 90^\circ) \end{array}\right\} \stackrel{CC}{\Rightarrow} \Delta ACD \equiv \Delta ACB \Rightarrow CD \equiv CB, \text{ adică } \Delta BCD$$

este isoscel. Cum $\sphericalangle CBD = 60^\circ \Rightarrow \Delta BCD$ este echilateral și $BD = BC$ (1). Dar $AB = \frac{BD}{2} \stackrel{(1)}{=} \frac{BC}{2}$, adică $AB = \frac{BC}{2}$.

Observație: Deoarece măsurile unghiurilor triunghiului sunt de 30°, 60°, 90°, această teoremă se mai numește și teorema 30–60–90.

Reciproca teoremei 30–60–90: Dacă într-un triunghi dreptunghic lungimea unei catete este jumătate din lungimea ipotenuzei, atunci măsura unghiului opus acestei catete este egală cu 30°.



Ipoteza: ΔABC, $\sphericalangle BAC = 90^\circ$, $AB = \frac{BC}{2}$. *Concluzia:* $\sphericalangle ACB = 30^\circ$.

Demonstrație:
Construim simetricul punctului B față de punctul A și-l notăm cu D.
Observăm că $\sphericalangle DAC = \sphericalangle DAB - \sphericalangle BAC = 180^\circ - 90^\circ = 90^\circ = \sphericalangle BAC$.
Identificăm în triunghiurile ACD și ACB următoarele congruențe:

$$\left.\begin{array}{l} AC \equiv AC \text{ (latură comună)} \\ AD \equiv AB \text{ (din construcţie)} \\ \sphericalangle DAC \equiv \sphericalangle BAC \end{array}\right\} \stackrel{CC}{\Rightarrow} \Delta ADC \equiv \Delta ABC \Rightarrow DC = BC \text{ (1) și } \sphericalangle ACD = \sphericalangle ACB \text{ (2).}$$

Dar $DB = 2 \cdot AB = 2 \cdot \frac{BC}{2} = BC$ și din (1) rezultă că $DC = BC = DB$, adică triunghiul BCD este echilateral.
Din $\sphericalangle BCD = 60^\circ$ și din (2) rezultă că $\sphericalangle ACB = \sphericalangle ACD = 60^\circ : 2 = 30^\circ$.

3. Construiește un triunghi dreptunghic ABC, cu $\sphericalangle A = 90^\circ$, astfel încât:
a) $AB = 3$ cm, $AC = 4$ cm; **b)** $AB = 5$ cm, $AC = 12$ cm; **c)** $AB = 8$ cm, $AC = 15$ cm.
Măsoară ipotenuza BC în fiecare caz și verifică dacă relația: $AB^2 + AC^2 = BC^2$ este adevărată.
Observații: Construind triunghiurile și măsurând ipotenuzele obținem:
a) $BC = 5$ cm, $3^2 + 4^2 = 5^2$ și relația $AB^2 + AC^2 = BC^2$ este adevărată;
b) $BC = 13$ cm, $5^2 + 12^2 = 13^2$ și relația $AB^2 + AC^2 = BC^2$ este adevărată;
c) $BC = 17$ cm, $8^2 + 15^2 = 17^2$ și relația $AB^2 + AC^2 = BC^2$ este adevărată.
Relațiile obținute reprezintă cazuri particulare ale teoremei lui Pitagora. Tripletele: (3, 4, 5), (5, 12, 13), (8, 15, 17) se numesc numere pitagoreice, deoarece ele satisfac relația dintre lungimile catetelor și lungimea ipotenuzei unui triunghi dreptunghic.

Teorema lui Pitagora se enunță astfel: Într-un triunghi dreptunghic, pătratul lungimii ipotenuzei este egal cu suma pătratelor catetelor.

- Dacă triunghiul dreptunghic este notat ABC, cu $\sphericalangle A = 90^\circ$, atunci $BC^2 = AB^2 + AC^2$. Notând $AB = c$, $BC = a$, $AC = b$, atunci teorema lui Pitagora se scrie sub forma: $a^2 = b^2 + c^2$.

Reține!

- **Proprietăți ale triunghiurilor dreptunghice**
  - **Teorema medianei:** Într-un triunghi dreptunghic, lungimea medianei corespunzătoare ipotenuzei este egală cu jumătate din lungimea ipotenuzei.
  - **Reciproca teoremei medianei:** Dacă mediana unui triunghi are lungimea egală cu jumătate din lungimea laturii corespunzătoare, atunci triunghiul este dreptunghic și are ca ipotenuză latura corespunzătoare medianei.
  - Centrul cercului circumscris unui triunghi dreptunghic este mijlocul ipotenuzei.

▹ **Teorema 30–60–90:** Într-un triunghi dreptunghic cu măsura unui unghi egală cu 30°, lungimea catetei care se opune acestui unghi este egală cu jumătate din lungimea ipotenuzei.

▹ **Reciproca teoremei 30–60–90:** Dacă într-un triunghi dreptunghic lungimea unei catete este jumătate din lungimea ipotenuzei, atunci măsura unghiului opus acestei catete este egală cu 30°.

- **Teorema lui Pitagora:** Dacă un triunghi este dreptunghic, atunci suma pătratelor lungimilor catetelor este egală cu pătratul lungimii ipotenuzei.

▹ Trei numere naturale a, b, c care satisfac relația: $a^2 + b^2 = c^2$ formează un triplet de numere pitagoreice. Cel mai cunoscut triplet de numere pitagoreice este tripletul (3, 4, 5).

▹ Dacă a, b, c sunt numere pitagoreice, atunci și multiplii acestora $a \cdot n, b \cdot n, c \cdot n$, unde n este număr natural, $n \geq 2$, sunt numere pitagoreice.

▹ Tripletele de numere pitagoreice ne ajută să verificăm dacă un triunghi este dreptunghic.

Aplicăm cunoștințele

1. Triunghiul ABC este dreptunghic, cu $\sphericalangle A = 90°$. Dacă $AB = 7$ cm și $AC = 24$ cm, calculează BC.

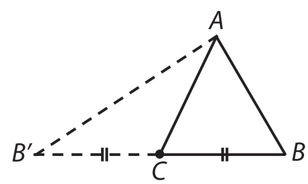
Rezolvare: Din teorema lui Pitagora avem: $AB^2 + AC^2 = BC^2$. Înlocuim: $7^2 + 24^2 = BC^2$. Obținem: $BC^2 = 625 = 25^2$, deci $BC = 25$ cm.

2. **a)** Verifică dacă tripletul (11, 60, 61) este un triplet de numere pitagoreice.
b) Dacă $MN = 11$ cm, $MP = 60$ cm și $NP = 61$ cm, precizează dacă triunghiul este dreptunghic și care este unghiul drept.

Rezolvare: **a)** Cum $11^2 = 121$, $60^2 = 3600$, $61^2 = 3721$ și $121 + 3600 = 3721$, rezultă că (11, 60, 61) este un triplet de numere pitagoreice; **b)** La punctul a) am arătat că $11^2 + 60^2 = 61^2$, adică $MN^2 + MP^2 = NP^2$, ceea ce arată că triunghiul MNP este dreptunghic, cu $\sphericalangle M = 90°$.

3. Se consideră un triunghi echilateral ABC și se notează cu B' simetricul punctului B față de punctul C. Demonstrează că:

a) $\sphericalangle BAB' = 90°$; **b)** $\sphericalangle AB'B = 30°$.



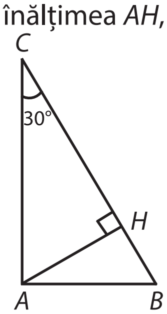
Ipoteza: ΔABC, $AB = BC = AC$, $C \in BB'$ și $CB' = CB$.
Concluzia: a) $\sphericalangle BAB' = 90°$; b) $\sphericalangle AB'B = 30°$.
Demonstrație:

a) Cum $BC = CB'$, rezultă că $BC = \frac{BB'}{2}$. Dar $BC = AC$ și, ca urmare, $AC = \frac{BB'}{2}$. În triunghiul ABB', lungimea medianei AC este jumătate din lungimea laturii corespunzătoare și, aplicând reciproca teoremei 1, rezultă că triunghiul $AB'B$ este dreptunghic, cu ipotenuza BB', adică $\sphericalangle BAB' = 90°$.

b) În triunghiul BAB', deoarece $\sphericalangle BAB' = 90°$ și $AB = AC = \frac{BB'}{2}$, aplicând reciproca teoremei 30–60–90, rezultă că $\sphericalangle AB'B = 30°$.

4. Se consideră un triunghi dreptunghic ABC, cu $\sphericalangle A = 90°$ și $\sphericalangle C = 30°$. Se construiește înălțimea AH, $H \in BC$. Știind că $AB = 6$ cm, calculează:

a) BC; **b)** $\sphericalangle BAH$; **c)** CH.



Ipoteza: ΔABC, $\sphericalangle A = 90°$, $\sphericalangle C = 30°$; $AH \perp BC$, $H \in BC$, $AB = 6$ cm.
Concluzia: a) $BC = ?$ cm; b) $\sphericalangle BAH = ?$; c) $CH = ?$ cm.
Demonstrație:

a) În triunghiul ABC aplicăm teorema 30–60–90 și din $AB = \frac{BC}{2}$, rezultă că $6 \text{ cm} = \frac{BC}{2}$, adică $BC = 12$ cm.

b) În triunghiul AHC, $\sphericalangle CAH = 90° - \sphericalangle ACH = 90° - 30° = 60°$. Calculăm $\sphericalangle BAH = \sphericalangle BAC - \sphericalangle CAH = 90° - 60° = 30°$.

c) În triunghiul ABH, cu $\sphericalangle H = 90°$, $\sphericalangle A = 30°$, aplicând teorema 30–60–90, se obțin: $BH = \frac{AB}{2} = \frac{6}{2} = 3$ cm și $CH = BC - BH = 12 \text{ cm} - 3 \text{ cm} = 9$ cm.

Exersează, fixează și aprofundează cunoștințele

1. Fie ABC un triunghi dreptunghic, cu $\sphericalangle A = 90°$.
a) Calculează lungimea ipotenuzei BC, știind că $AB = 3$ cm și $AC = 4$ cm.
b) Calculează lungimea catetei AB, știind că $BC = 29$ cm și $AC = 21$ cm.
c) Calculează lungimea catetei AC, știind că $BC = 37$ cm și $AB = 12$ cm.

2. Se consideră un triunghi dreptunghic ABC, cu $\sphericalangle A = 90°$ și se notează cu M mijlocul ipotenuzei.
a) Calculează lungimea ipotenuzei, știind că $AM = 4{,}5$ cm.
b) Calculează lungimea medianei AM, știind că $BC = 17$ cm.

3. Fie ABC un triunghi dreptunghic, cu $\sphericalangle A = 90°$ și $\sphericalangle B = 30°$.
a) Calculează lungimea ipotenuzei, știind că $AC = 5$ cm.
b) Calculează lungimea catetei AC, știind că $BC = 24$ cm.

4. Determină măsurile unghiurilor triunghiului dreptunghic ABC, cu $\sphericalangle A = 90°$, știind că:
a) $AB = 5{,}5$ cm și $BC = 11$ cm; **b)** $AC = 17$ cm și $BC = 34$ cm.

5. În triunghiul dreptunghic ABC, cu $\sphericalangle A = 90°$, punctul M este mijlocul laturii BC. Știind că $AM \equiv AB$, calculează măsurile unghiurilor triunghiului ABC.

6. Un triunghi ABC are latura $AB = 16{,}8$ cm și mediana $CM = 8{,}4$ cm, $M \in AB$. Arată că triunghiul este dreptunghic și precizează unghiul drept.

7. **Activitate pe grupe.** Precizați care dintre tripletele de mai jos sunt triplete pitagoreice.
a) (8, 15, 17); **b)** (7, 24, 25); **c)** (5, 12, 13).

8. Se consideră un triunghi dreptunghic ABC, cu $\sphericalangle A = 90°$ și $\sphericalangle B = 15°$. Dacă AH ($H \in BC$) este înălțime, demonstrează că $BC = 4 \cdot AH$.

9. În triunghiul dreptunghic ABC, cu $\sphericalangle A = 90°$, AM este mediană, $M \in BC$ și AH este înălțime ($H \in BC$). Știind că $2 \cdot MH = AM$, determină măsurile unghiurilor triunghiului ABC.

10. Se consideră triunghiul isoscel ABC ($AB = AC$) și $\sphericalangle BAC = 120°$. Mediatoarea laturii AB intersectează latura BC în punctul M. Demonstrează că $CM = 2 \cdot BM$.

AUTOEVALUARE

10 min

1. Dacă apreciezi că afirmația este adevărată, încercuiește litera A. În caz contrar, încercuiește litera F. **4,5 puncte**

Fie M un punct pe latura AB a triunghiului ABC.
a) Dacă $MA = MB = MC$, atunci $\sphericalangle BAC = 90°$. **A F**
b) Dacă $MA = MB$ și $\sphericalangle ACB = 90°$, atunci $AB = 2 \cdot MC$. **A F**
c) Dacă $\sphericalangle ACB = 90°$ și $2 \cdot AC = AB$, atunci $\sphericalangle ABC = 30°$. **A F**

2. Încercuiește litera corespunzătoare răspunsului corect. **3 puncte**

a) În triunghiul ascuțitunghic ABC se notează cu D piciorul perpendicularei din A pe latura BC. Dacă $AD = 4$ cm, $BD = 3$ cm și $AC = 5$ cm, atunci perimetrul triunghiului ABC este egal cu:
A. 16 cm; **B.** 13 cm; **C.** 14 cm; **D.** 15 cm.

b) Un triunghi ABC este înscris într-un cerc. Dacă AB este diametrul cercului, $AC = 8$ cm și $BC = 6$ cm, atunci raza cercului circumscris triunghiului ABC are lungimea egală cu:
A. 6 cm; **B.** 5 cm; **C.** 14 cm; **D.** 7 cm.

3. Completează caseta cu răspunsul corect. **1,5 puncte**

Un triunghi dreptunghic ABC, cu $\sphericalangle A = 90°$, are $BC = 18$ cm și $\sphericalangle ACB = 60°$. Dacă O este mijlocul ipotenuzei BC, atunci perimetrul triunghiului AOC este egal cu $\boxed{}$.

Din oficiu: 1 punct

Exerciții și probleme recapitulative

1. În triunghiul echilateral ABC se construiește înălțimea AD ($D \in BC$) și se notează cu M mijlocul laturii AC. Demonstrează că triunghiul CDM este echilateral.

2. În triunghiul dreptunghic ABC, cu $\sphericalangle A = 90°$, punctul D este piciorul perpendicularei din vârful A pe latura BC. Știind că $BD = 9$ cm, $BC = 25$ cm și $4 \cdot AD = 3 \cdot CD$, calculează lungimile segmentelor CD, AD, AB, AC.

3. În triunghiul isoscel ABC ($AB = AC$) se construiește înălțimea BD, $D \in AC$. Se știe că $BD = 24$ cm și $AD = 7$ cm.

a) Calculează lungimile laturilor triunghiului ABC.

b) Demonstrează că triunghiul ABC nu este dreptunghic.

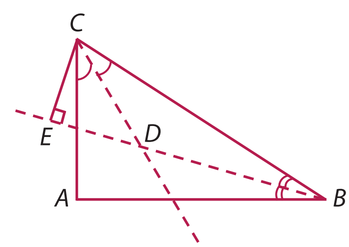
4. Se consideră un triunghi ABC, cu $AB = AC$ și $\sphericalangle A < 90°$. Se construiește înălțimea AD, $D \in BC$ și se consideră punctele E și F situate pe semidreptele DA, respectiv DC, astfel încât $DE \equiv DB$ și $DF \equiv AD$. Demonstrează că $FE \perp AB$.

5. În triunghiul echilateral ABC se notează cu D mijlocul laturii BC și se construiesc $DE \perp AB$ ($E \in AB$) și $DF \perp AC$ ($F \in AC$). Calculează lungimea segmentului EF dacă:

a) $\mathscr{P}_{\Delta ABC} = 48$ cm; **b)** $\mathscr{P}_{\Delta ABC} = 108$ cm.

6. Fie triunghiul isoscel ABC, cu $AB = AC$ și $\sphericalangle A = 120°$. Se consideră un punct M pe latura BC, astfel încât $BM < MC$. Dacă perpendiculara în punctul M pe latura BC intersectează dreptele AB și AC în punctele N și P, demonstrează că $AB = PM + MN$.

7. În triunghiul MNP, cu $MN = MP$ și $\sphericalangle M = 120°$, considerăm punctul D pe latura NP și notăm cu E și F picioarele perpendicularelor construite din D pe dreptele MN, respectiv MP. Demonstrează că $2 \cdot (DE + DF) = NP$.



8. În figura alăturată, bisectoarele unghiurilor ABC și ACB ale triunghiului ABC se intersectează în punctul D și se notează cu E piciorul perpendicularei din punctul C pe dreapta BD.

a) Demonstrează că dacă triunghiul ABC este dreptunghic, cu $\sphericalangle BAC = 90°$, atunci triunghiul CED este isoscel.

b) Demonstrează că dacă triunghiul CED este isoscel, atunci triunghiul ABC este dreptunghic, cu $\sphericalangle BAC = 90°$.

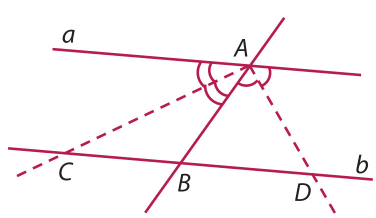
9. Se consideră un triunghi dreptunghic ABC și se notează cu M mijlocul ipotenuzei BC. Se știe că $AB \equiv AM$.

a) Demonstrează că triunghiul ABM este echilateral.

b) Determină măsurile unghiurilor triunghiului ABC.

10. Bisectoarea unghiului A al triunghiului ABC, cu $\sphericalangle A < 90°$, intersectează latura BC în punctul D. Se notează cu E piciorul perpendicularei din D pe latura AB și cu F piciorul perpendicularei din D pe latura AC. Demonstrează că:

a) $\sphericalangle ADE \equiv \sphericalangle ADF$; **b)** $AD \perp EF$.



11. În figura alăturată, dreptele a și b sunt paralele, iar punctele A și B sunt situate pe aceste drepte ($A \in a$, $B \in b$). Bisectoarele unghiurilor formate de dreapta AB cu dreapta a intersectează dreapta b în punctele C și D. Demonstrează că:

a) triunghiul CAD este dreptunghic;

b) triunghiul BAD este isoscel;

c) $CD = 2 \cdot AB$.

EVALUARE

Timp de lucru: 50 de minute.

Subiectul I. Dacă apreciezi că afirmația este adevărată, completează căsuța alăturată cu litera A. În caz contrar, completează cu litera F.

Triunghiul ABC este isoscel, cu $\sphericalangle BAC = 120°$. Dacă perpendiculara în A pe dreapta AC intersectează perpendiculara în B pe dreapta BC în punctul D și $AD \cap BC = \{E\}$, atunci:

(5p) **1.** triunghiul ABD este isoscel; ☐

(5p) **2.** semidreapta DA este bisectoarea unghiului BDC; ☐

(5p) **3.** triunghiurile ACE și BDE sunt congruente; ☐

(5p) **4.** dreptele AB și CD sunt paralele. ☐

Subiectul II. Unește, prin săgeți, fiecare cifră corespunzătoare enunțurilor din coloana **A**, cu litera care indică răspunsul corect aflat în coloana **B**.

	A	B
(5p)	**1.** Dacă un triunghi MNP are $MN = MP$ și $\sphericalangle N = 40°$, atunci măsura unghiului M este egală cu ...	**a)** 54°;
(5p)	**2.** Dacă triunghiul isoscel ABC are unghiul exterior C cu măsura de 40°, atunci măsura unghiului BAC este egală cu ...	**b)** 100°;
(5p)	**3.** Dacă DEF este un triunghi în care $DE = DF$ și $\sphericalangle E = 54°$, atunci bisectoarele DD' și EE' ale triunghiului formează un unghi obtuz cu măsura de …	**c)** 20°;
(5p)	**4.** Dacă triunghiul LMN are $\sphericalangle L = 36°$ și NH este înălțimea triunghiului LMN, $H \in LM$, atunci măsura unghiului LNH este egală cu ...	**d)** 117°; **e)** 18°.

Subiectul III. La cerințele următoare alege litera care indică singura variantă corectă.

Triunghiul ABC este dreptunghic, cu $\sphericalangle A = 90°$, $\sphericalangle B = 60°$, $AB = 18$ cm. Dacă $D \in BC$, astfel încât $\sphericalangle DAC \equiv \sphericalangle DCA$ și $E \in AD$, astfel încât $DE = 9$ cm, atunci:

(5p) **1.** Măsura unghiului ACB este egală cu:
A. 60°; **B.** 30°; **C.** 45°; **D.** 90°.

(5p) **2.** Lungimea segmentului BC este egală cu:
A. 18 cm; **B.** 9 cm; **C.** 36 cm; **D.** 27 cm.

(5p) **3.** Măsura unghiului AEB este egală cu:
A. 30°; **B.** 45°; **C.** 60°; **D.** 90°.

(5p) **4.** Perimetrul triunghiului ABD este egal cu:
A. 54 cm; **B.** 27 cm; **C.** 72 cm; **D.** 108 cm.

La subiectele IV și V scrie rezolvările complete.

Subiectul IV. Se consideră un triunghi dreptunghic ABC, cu $\sphericalangle A = 90°$, și AD înălțimea acestuia, $D \in BC$. Perpendiculara din D pe dreapta AC intersectează bisectoarea AE a unghiului CAD în punctul O și latura AC în punctul F ($E \in BC$, $O \in AE$, $F \in AC$).

(5p) **a)** Demonstrează că $\sphericalangle BAD \equiv \sphericalangle ACD$.

(5p) **b)** Demonstrează că triunghiul DOE este isoscel.

(5p) **c)** Știind că $\sphericalangle ACB = 30°$, demonstrează că triunghiul DOE este echilateral.

Subiectul V. Fie triunghiul ABC dreptunghic în A, cu $AB = 30$ cm și $AC = 40$ cm.

(5p) **a)** Calculează lungimea ipotenuzei BC.

(5p) **b)** Dacă D este piciorul perpendicularei din A pe BC și $AD = 24$ cm, calculează lungimea segmentului CD.

(5p) **c)** Dacă M este mijlocul laturii BC, calculează lungimea segmentului MD.

Se acordă 10 puncte din oficiu. Nota se obține împărțind punctajul final la 10.

Subiectul	I.1	I.2	I.3	I.4	II.1	II.2	II.3	II.4	III.1	III.2	III.3	III.4	IV.a	IV.b	IV.c	V.a	V.b	V.c
Punctajul																		
Nota																		

RECAPITULAREA MATERIEI DIN CLASA A VI-A

TEST DE EVALUARE FINALĂ 1

Timp de lucru: 50 de minute.

Subiectul I. Dacă apreciezi că afirmația este adevărată, completează căsuța alăturată cu litera A. În caz contrar, completează cu litera F.

(5p) **1.** Dacă $x = 0$, atunci fracția $\frac{-3}{x^2+1}$ reprezintă un număr întreg. ☐

(5p) **2.** Opusul numărului rațional $-0,(3) + 0,1(3)$ este $\frac{1}{5}$. ☐

(5p) **3.** Dacă numărul $a^2 \cdot b$ este întreg negativ, atunci $-b$ este un număr întreg pozitiv. ☐

(5p) **4.** Probabilitatea ca alegând, la întâmplare, un număr din mulțimea $\{11, 12, 13, \ldots, 50\}$ acesta să fie pătrat perfect este 0,4. ☐

Subiectul II. Unește, prin săgeți, fiecare enunț din coloana **A** cu răspunsul corespunzător din coloana **B**.

	A	B
(5p)	**1.** Dacă numerele 2 și 5 sunt direct proporționale cu numerele x și 35, atunci x este egal cu ...	**a)** 7;
		b) 4;
(5p)	**2.** Numărul cu 65% mai mic decât 20 este ...	**c)** 0,5;
(5p)	**3.** Dacă numerele 15 și 35 sunt invers proporționale cu numerele 7 și y, atunci y este egal cu ...	**d)** 3;
(5p)	**4.** Dacă $\frac{x}{y} = \frac{5}{9}$, atunci $\frac{5x-y}{x+3y}$ este egal cu ...	**e)** 14.

Subiectul III. Alege litera corespunzătoare singurului răspuns corect.

(5p) **1.** Un divizor comun al numerelor naturale a și b cu $(a, b) = 2^3 \cdot 3$ este:

A. 9; **B.** 7; **C.** 6; **D.** 5.

(5p) **2.** Un multiplu comun al numerelor naturale a și b cu $[a, b] = 2^3 \cdot 3$, este:

A. 12; **B.** 16; **C.** 32; **D.** 48.

(5p) **3.** Dacă orice element n al unei mulțimi este număr natural și $13 < n < 207$, atunci cardinalul mulțimii este egal cu:

A. 192; **B.** 193; **C.** 194; **D.** 195.

(5p) **4.** Fie mulțimile A și B. Dacă $A = \{1, 4, 7, 10, 13, 16\}$ și orice element x al mulțimii B este număr natural mai mic sau egal cu 16, atunci:

A. $A \subset B$ și $B \not\subset A$; **B.** $B \subset A$ și $A \not\subset B$; **C.** $A \not\subset B$ și $B \not\subset A$; **D.** $A \subset B$ și $B \subset A$.

La subiectele IV și V scrie rezolvările complete.

Subiectul IV. Rezolvă în mulțimea numerelor întregi:

(15p) **a)** $3 + 2(x + 2) = 5$; **b)** $2(x + 5) + 3 < -9$; **c)** $|2x - 1| < 5$.

Subiectul V. Calculează:

(15p)

a) $22 - [-45 : (-9) - (-4)^2 \cdot (-2) - (-1)^4]$;

b) $(-10)^3 \cdot \left(-\frac{1}{2} + \frac{1}{4} - \frac{1}{8}\right) : (0,1)^{-2} \cdot \left(\frac{15}{4}\right)^{-1}$;

c) $\left[\left(\frac{2}{3}\right)^{2023} + \left(-\frac{2}{3}\right)^{2022} + \left(\frac{3}{2}\right)^{-2021}\right] : \left[\left(-\frac{2}{3}\right)^{2023} + \left(-\frac{3}{2}\right)^{-2022}\right]$.

Se acordă 10 puncte din oficiu. Nota se obține împărțind punctajul final la 10.

Subiectul	I.1	I.2	I.3	I.4	II.1	II.2	II.3	II.4	III.1	III.2	III.3	III.4	IV.a	IV.b	IV.c	V.a	V.b	V.c
Punctajul																		
Nota																		

TEST DE EVALUARE FINALĂ 2

Timp de lucru: 50 de minute.

Subiectul I. Dacă apreciezi că afirmația este adevărată, completează căsuța alăturată cu litera A. În caz contrar, completează cu litera F.

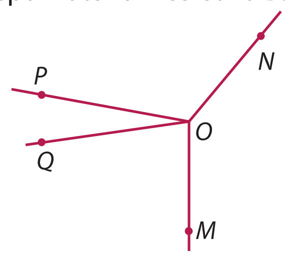
(5p) **1.** Mijlocul ipotenuzei unui triunghi dreptunghic este egal depărtat de vârfurile triunghiului. ☐

(5p) **2.** Bisectoarele unghiurilor ascuțite ale unui triunghi dreptunghic formează un unghi cu măsura de 135°. ☐

(5p) **3.** Dacă dreptele distincte d_1 și d_2 sunt perpendiculare pe dreapta *a*, atunci dreptele d_1 și d_2 sunt paralele. ☐

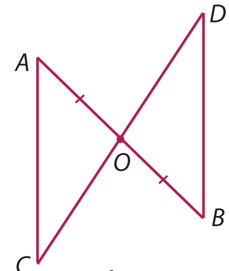
(5p) **4.** Într-un triunghi dreptunghic, lungimea catetei opuse unghiului cu măsura de 30° este egală cu jumătate din lungimea ipotenuzei. ☐

Subiectul II. Unește, prin săgeți, fiecare enunț din coloana **A** cu răspunsul corespunzător din coloana **B**.
Observă figura alăturată. Dacă $\sphericalangle MON = 145°$, $\sphericalangle NOP = 117°$ și
$\sphericalangle QOP + \sphericalangle PON + \sphericalangle NOM + MOP = 383°$, atunci:



	A	**B**
(5p)	**1.** $\sphericalangle POQ = ...$	**a)** 31°;
(5p)	**2.** $\sphericalangle MOP = ...$	**b)** 98°;
(5p)	**3.** $\sphericalangle MOQ = ...$	**c)** 75°;
(5p)	**4.** $\sphericalangle NOQ = ...$	**d)** 23°;
		e) 140°.

Subiectul III. Alege litera corespunzătoare singurului răspuns corect.

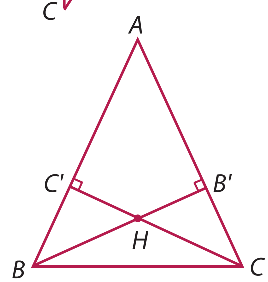


(5p) **1.** În figura alăturată, punctul *O* este mijlocul segmentului *AB*. Dacă punctul *D* este simetricul punctului *C* față de punctul *O*, atunci:

A. $AO \equiv DO$; **B.** $BO \equiv CO$;
C. $\sphericalangle OAC \equiv \sphericalangle OBD$; **D.** $\sphericalangle ACO \equiv \sphericalangle DBO$.

(5p) **2.** Complementul unghiului *MON* este o pătrime din suplementul acestuia. Măsura unghiului *MON* este egală cu:

A. 45°; **B.** 50°;
C. 30°; **D.** 60°.



(5p) **3.** Triunghiul *ABC* din figura alăturată este isoscel, cu $AB \equiv AC$. Dacă înălțimile BB' ($B' \in AC$) și CC' ($C' \in AB$) sunt concurente în punctul *H*, atunci:

A. $\sphericalangle ABH \equiv \sphericalangle BAH$; **B.** $\sphericalangle ACH \equiv \sphericalangle ABH$;
C. $\sphericalangle ACH \equiv \sphericalangle CAH$; **D.** $\sphericalangle BAB' \equiv \sphericalangle ACC'$.

(5p) **4.** Se știe că $\sphericalangle AOB = 40°$, $\sphericalangle BOC = 50°$ și $\sphericalangle AOC = x°$. Unghiurile *AOB* și *BOC* sunt adiacente dacă:

A. $x = 10$; **B.** $40 < x < 50$;
C. $x = 90$; **D.** $x > 90$.

Subiectul IV. Scrie rezolvarea completă.

Se consideră triunghiul dreptunghic *ABC*, cu $\sphericalangle A = 90°$. Calculează:

(10p) **a)** lungimea ipotenuzei *BC*, știind că $AB = 20$ cm și $AC = 15$ cm;

(10p) **b)** lungimea catetei *AB*, știind că $BC = 5$ cm și $AC = 3$ cm;

(10p) **c)** lungimea catetei *AC*, știind că $BC = 13$ cm și $AB = 12$ cm.

Se acordă 10 puncte din oficiu. Nota se obține împărțind punctajul final la 10.

Subiectul	I.1	I.2	I.3	I.4	II.1	II.2	II.3	II.4	III.1	III.2	III.3	III.4	IV.a	IV.b	IV.c
Punctajul															
Nota															

Soluțiile testelor de evaluare și de autoevaluare

RECAPITULAREA MATERIEI DIN CLASA A V-A

Test de evaluare inițială 1 (pag. 9): I. 1. 3,(3). **2.** 40. **3.** 1,375. **4.** 125. **II. 1.** $\longrightarrow$ b); **2.** $\longrightarrow$ c); **3.** $\longrightarrow$ a); **4.** $\longrightarrow$ d). **III. 1.** D. **2.** B. **3.** C. **4.** B. **IV. 1.** 30 minute. **2.** 14 vase de 3 l. **3.** 100, respectiv 37.

Test de evaluare inițială 2 (pag. 10): II. 1. $\longrightarrow$ e). **2.** $\longrightarrow$ d). **3.** $\longrightarrow$ c). **4.** $\longrightarrow$ b). **III. 1.** B. **2.** B. **3.** C. **4.** A. **IV. 1.** a) $\measuredangle BOC = 0,(6) \cdot 108° = 72°$; b) $\measuredangle AOC = \measuredangle AOB + \measuredangle BOC = 108° + 72° = 180° \Rightarrow \measuredangle AOC$ este unghi alungit, OA și OC sunt semidrepte opuse, iar punctele A, O, C sunt coliniare; c) Din $\measuredangle BOD = \measuredangle AOD - 36°$ și $\measuredangle BOD + \measuredangle AOD = \measuredangle AOB = 108° \Rightarrow \measuredangle AOD = 72°$. Cum $\measuredangle BOC = 72° \Rightarrow \measuredangle AOD = \measuredangle BOC$ (figura 1).

2. a) Din $x + 4x + 90° = 180°$ rezultă $x = 18°$, adică $\measuredangle PON = 18°$ și $\measuredangle ROM = 72°$; b) Din OS, OP semidrepte opuse, rezultă $\measuredangle POS$ alungit, adică $\measuredangle POS = 180°$. Dar $\measuredangle ROS = \measuredangle POS - \measuredangle POR = 180° - 90° = 90°$. Deci $\measuredangle ROS$ este unghi drept; c) $\measuredangle SOM = \measuredangle ROS - \measuredangle ROM = 90° - 72° = 18°$ (figura 2).

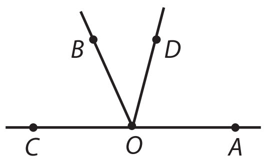


Fig. 1

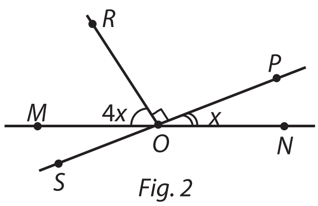


Fig. 2

CAPITOLUL I. MULȚIMI. MULȚIMEA NUMERELOR NATURALE

I.1. Mulțimi. Mulțimea numerelor naturale

Autoevaluare (pag. 14): 1. a) F; b) F; c) A. **2.** a) C; b) C. **3.** $x = 6$.

Autoevaluare (pag. 17): 1. a) F; b) A; c) A. **2.** a) $\longrightarrow$ 3); b) $\longrightarrow$ 4); c) $\longrightarrow$ 2). **3.** $2^{\text{card } M} = 2^4 = 16$.

Autoevaluare (pag. 21): 1. a) A; b) A; c) F. **2.** a) A; b) B. **3.** D_{2024}.

Autoevaluare (pag. 24): 1. a) A; b) A; c) F. **2.** a) D; b) C. **3.** Segmentul AM.

Evaluare (pag. 26): I. 1. A. **2.** F. **3.** A. **4.** F. **II.** 1. $\longrightarrow$ b); 2. $\longrightarrow$ a); 3. $\longrightarrow$ d); 4. $\longrightarrow$ c). **III. 1.** B. **2.** A. **3.** C. **4.** D. **IV.** a) $\varnothing$, {3}; {4}; {3, 4}; b) {5}; {6}; {5, 6}; c) $B \cup A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ și $A \cap (B \cup A) = \{1, 2, 3, 4\} = A$; $A \cap B = \{3, 4\}$ și $B \cup (A \cap B) = \{3, 4, 5, 6\} = B$. **V.** a) $(13 + 15) - 25 = 3$; b) 10; c) 12.

I.2. Divizibilitatea numerelor naturale

Autoevaluare (pag. 30): 1. a) A; b) B. **2.** a) $\longrightarrow$ 3); b) $\longrightarrow$ 1); c) $\longrightarrow$ 2). **3.** $n = 10$.

Autoevaluare (pag. 32): 1. a) F; b) A; c) A. **2.** a) $\longrightarrow$ 3); b) $\longrightarrow$ 2); c) $\longrightarrow$ 1). **3.** 20.

Autoevaluare (pag. 36): 1. a) A; b) A; c) A. **2.** a) A; b) A. **3.** 26.

Evaluare (pag. 38): I. 1. F. **2.** A. **3.** A. **4.** F. **II. 1.** $\longrightarrow$ d); **2.** $\longrightarrow$ c); **3.** $\longrightarrow$ b); **4.** $\longrightarrow$ e). **III. 1.** D. **2.** B. **3.** B. **4.** A. **IV.** a) {320, 322, 324, 326, 328}; b) {320, 324, 328}; c) {322, 326}. **V.** a) $10^n + 125 = \underbrace{100...0}_{n \text{ zerouri}} + 125 = \underbrace{100...0}_{n\text{-3 zerouri}}125$ și suma cifrelor numărului este egală cu 9, prin urmare $(10^n + 125) \vdots 9$; b) $\overline{ab25} = \overline{ab00} + 25 = \overline{ab} \cdot 100 + 25 = 25 \cdot (\overline{ab} \cdot 4 + 1) \vdots 25$; c) Din $\overline{abcd} = \overline{ab00} + \overline{cd} = 100 \cdot \overline{ab} + \overline{cd}$ și $25 \mid 100\overline{ab} \Rightarrow 25 \mid \overline{abcd} \Leftrightarrow 25 \mid \overline{cd}$, adică $\overline{cd} \in \{00, 25, 50, 75\}$ și cum $c \neq 0 \Rightarrow \overline{cd} \in \in \{25, 50, 75\}$.

CAPITOLUL II. RAPOARTE. PROPORȚII

II.1. Rapoarte și proporții

Autoevaluare (pag. 44): 1. a) A; b) B. **2.** a) $\longrightarrow$ 3; b) $\longrightarrow$ 2); c) $\longrightarrow$ 1). **3.** 1%.

Autoevaluare (pag. 47): 1. a) F; b) F; c) A; d) F. **2.** a) C; b) C. **3.** 10.

Autoevaluare (pag. 50): 1. a) D; b) C. **2.** a) $\longrightarrow$ 3); b) $\longrightarrow$ 1); c) $\longrightarrow$ 2). **3.** 2,2.

Evaluare (pag. 52): I. 1. A. **2.** F. **3.** A. **4.** A. **II. 1.** $\longrightarrow$ d). **2.** $\longrightarrow$ c). **3.** $\longrightarrow$ b). **4.** $\longrightarrow$ e). **III. 1.** B. **2.** A. **3.** C. **4.** D. **IV.** a) 600 de lei; b) 660 de lei; c) 21%.

II.2. Mărimi proporționale

Autoevaluare (pag. 55): 1. a) A; b) F; c) A. **2.** a) $\longrightarrow$ 4); b) $\longrightarrow$ 3); c) $\longrightarrow$ 2). **3.** 1,5.

Autoevaluare (pag. 58): 1. a) A; b) F; c) A. **2.** a) $\longrightarrow$ 4); b) $\longrightarrow$ 3); c) $\longrightarrow$ 2). **3.** 855.

Autoevaluare (pag. 61): 1. a) B; b) C. **2.** a) $\longrightarrow$ 2); b) $\longrightarrow$ 1); c) $\longrightarrow$ 4). **3.** 15.

Evaluare (pag. 62): I. 1. A. **2.** A. **3.** F. **4.** A. **II. 1.** $\longrightarrow$ d); **2.** $\longrightarrow$ a); **3.** $\longrightarrow$ c); **4.** $\longrightarrow$ e). **III. 1.** B. **2.** B. **3.** D. **4.** C. **IV.** a) $a = 8$, $b = 12$, $c = 20$; b) Da.

II.3. Organizarea datelor și probabilități

Autoevaluare (pag. 66): 1. a) F; b) A; c) F. **2.** a) B; b) B. **3.** a) $\longrightarrow$ 2); b) $\longrightarrow$ 4); c) $\longrightarrow$ 1).

Autoevaluare (pag. 70): 1. a) B; b) D. **2.** a) $\longrightarrow$ 1); b) $\longrightarrow$ 3); c) $\longrightarrow$ 4). **3.** 300.

Autoevaluare (pag. 72): 1. a) D; b) C. **2.** a) $\longrightarrow$ 3); b) $\longrightarrow$ 2); c) $\longrightarrow$ 1). **3.** 0,75.

Evaluare (pag. 74): I. 1. F. **2.** A. **3.** A. **4.** A. **II. 1.** $\longrightarrow$ c); **2.** $\longrightarrow$ e); **3.** $\longrightarrow$ a); **4.** $\longrightarrow$ b). **III. 1.** A. **2.** D. **3.** B. **4.** B. **IV.** a) 0,1; b) 0,5; c) 0,1; d) 0,2; e) 0,2; f) 0,8.

CAPITOLUL III. MULȚIMEA NUMERELOR ÎNTREGI

III.1. Numere întregi

Autoevaluare (pag. 79): 1. a) A; b) A; c) F. **2.** a) $\longrightarrow$ 3); b) $\longrightarrow$ 1); c) $\longrightarrow$ 2). **3.** 3.

Autoevaluare (pag. 82): 1. a) F; b) A; c) A. **2.** a) B; b) A. **3.** a) $\longrightarrow$ 3); b) $\longrightarrow$ 1); c) $\longrightarrow$ 2).

Autoevaluare (pag. 85): 1. A) C; b) B. **2.** A) $\longrightarrow$ 3); b) $\longrightarrow$ 1); c) $\longrightarrow$ 4), d) $\longrightarrow$ 2). **3.** -2.

Autoevaluare (pag. 87): 1. a) A; b) F; c) F; d) A. **2.** a) C; b) C. **3.** -6.

Autoevaluare (pag. 90): 1. a) A; b) C. **2.** a) $\longrightarrow$ 5); b) $\longrightarrow$ 3); c) $\longrightarrow$4), d) $\longrightarrow$ 1). **3.** 100.

Autoevaluare (pag. 91): 1. a) B; b) B. **2.** a) $\longrightarrow$ 2); b) $\longrightarrow$ 3); c) $\longrightarrow$ 4), d) $\longrightarrow$ 1). **3.** 700.

Evaluare (pag. 93): I. 1. A. **2.** A. **3.** A. **4.** F. **II. 1.** $\longrightarrow$ e); **2.** $\longrightarrow$ b); **3.** $\longrightarrow$ a); **4.** $\longrightarrow$ d). **III. 1.** D; **2.** D. **3.** C. **4.** D. **IV.** a) $(a, b) \in \{(-3, -1), (3, 1), (-1, -3), (1, 3)\}$; b) $(a, b) \in \{(6, 5), (-10, -9), (6, -1), (-10, -3)\}$; c) $(a, b) \in \{(-1, -7), (-5, -3), (5, -1), (1, 3)\}$. **V.** a) 100; b) -35; c) 5.

III.2. Ecuații și inecuații

Autoevaluare (pag. 96): 1. a) F; b) F; c) A; d) F. **2.** a) D; b) D. **3.** 0.

Autoevaluare (pag. 98): 1. a) C; b) D. **2.** a) $\longrightarrow$ 2); b) $\longrightarrow$ 1); c) $\longrightarrow$ 3), d) $\longrightarrow$ 4). **3.** 9.

Autoevaluare (pag. 100): 1. a) A; b) F; c) A; d) F. **2.** a) $\longrightarrow$ 2); b) $\longrightarrow$ 3); c) $\longrightarrow$ 4). **3.** -3.

Evaluare (pag. 102) I. 1. F. **2.** A. **3.** A. **4.** F. **II. 1.** $\longrightarrow$ d). **2.** $\longrightarrow$ a). **3.** $\longrightarrow$ c). **4.** $\longrightarrow$ b). **III. 1.** D. **2.** D. **3.** D. **4.** C. **IV.** a) $x < -2 \mid \cdot (-3) \Rightarrow x \cdot (-3) > -2 \cdot (-3) \Rightarrow -3 \cdot x > 6 \mid +4 \Rightarrow -3x + 4 > 10$; b) $x \cdot y = (-3) \cdot (-1) = 3$; c) $|x| = 3$ și $|y| = 1$. **V.** a) -4; b) 2; c) -8.

CAPITOLUL IV. MULȚIMEA NUMERELOR RAȚIONALE

IV.1. Mulțimea numerelor raționale

Autoevaluare (pag. 107): 1. a) A; b) F; c) A; d) A. **2.** a) B; b) C. **3.** 4,8(6).
Autoevaluare (pag. 110): 1. a) A; b) F; c) A; d) A. **2.** a) B; b) B. **3.** 96 cm.
Autoevaluare (pag. 113): 1. a) F; b) A; c) A; d) F. **2.** a) D; b) D. **3.** 1.
Autoevaluare (pag. 116): 1. a) A; b) F; c) F. **2.** a) B; b) C. **3.** a) $\longrightarrow$ 4); b) $\longrightarrow$ 1); c) $\longrightarrow$ 3).
Autoevaluare (pag. 119): 1. a) F; b) A; c) A; d) F. **2.** a) B; b) C. **3.** a) $\longrightarrow$ 1); b) $\longrightarrow$ 3); c) $\longrightarrow$ 2); d) $\longrightarrow$ 5).
Autoevaluare (pag. 122): 1. a) A; b) A; c) F. **2.** a) C; b) D. **3.** 50.
Evaluare (pag. 124): I. 1. F. **2.** A. **3.** A. **4.** A. **II.** 1. $\longrightarrow$ d); 2. $\longrightarrow$ a); 3. $\longrightarrow$ c); 4. $\longrightarrow$ e). **III. 1.** D. **2.** D. **IV.** a) $x < \frac{2}{3} \Rightarrow 2x < \frac{4}{3} \Rightarrow 2x - 1 < \frac{1}{3}$; b) $\frac{2}{3}$ verifică ecuația; c) $x > -\frac{2}{3} \Rightarrow -2x < \frac{4}{3} \Rightarrow -2x + 1 < \frac{4}{3} + 1 \Rightarrow -2x + 1 < \frac{7}{3}$.

CAPITOLUL V. NOȚIUNI GEOMETRICE FUNDAMENTALE

V.1. Unghiuri

Autoevaluare (pag. 128): 1. a) A; b) D. **2.** a) $\longrightarrow$ 3); b) $\longrightarrow$ 4); c) $\longrightarrow$ 2). **3.** $\sphericalangle MOS \equiv \sphericalangle NOR$; $\sphericalangle MOQ \equiv \sphericalangle NOP$; $\sphericalangle SOQ \equiv \sphericalangle ROP$; $\sphericalangle SON \equiv \sphericalangle MOR$; $\sphericalangle QON \equiv \sphericalangle MOP$; $\sphericalangle QOR \equiv \sphericalangle SOP$.
Autoevaluare (pag. 130): 1. a) F; b) A; c) F. **2.** a) D; b) B. **3. 4.** 70°.
Autoevaluare (pag. 133): 1. a) F; b) A; c) A. **2.** a) $\longrightarrow$ 3); b) $\longrightarrow$ 1); c) $\longrightarrow$ 4). **3.** 45°.
Autoevaluare (pag. 135): 1. a) F; b) A; c) A. **2.** a) $\longrightarrow$ 2); b) $\longrightarrow$ 3); c) $\longrightarrow$ 1). **3.** vârful comun, o latură comună și interioarele disjuncte.
Autoevaluare (pag. 138): 1. a) B; b) D. **2.** a) $\longrightarrow$ 4); b) $\longrightarrow$ 1); c) $\longrightarrow$ 3). **3.** 150°.
Evaluare (pag. 140): I. 1. A. **2.** F. **3.** F. **4.** F. **II. 1.** $\longrightarrow$ c); **2.** $\longrightarrow$ e); **3.** $\longrightarrow$ a); **4.** $\longrightarrow$ b). **III. 1.** C. **2.** B. **3.** B. **4.** A. **IV.** a) 90°; b) 120°; c) 90°. **V.** a) 40°, 70°, 120° și 130°; b) 85°; c) 20°, respectiv 110°.

V.2. Paralelism

Autoevaluare (pag. 144): 1. a) A; b) F; c) A. **2.** a) $\longrightarrow$ 4); b) $\longrightarrow$ 3); c) $\longrightarrow$ 1). **3.** a) $BC \parallel NP$ și $BN \parallel CP$; b) $AD \cap AM = \{A\}$, $AD \cap DQ = \{D\}$, $AM \cap MQ = \{M\}$ și $DQ \cap MQ = \{Q\}$.
Autoevaluare (pag. 147): 1. a) B; b) C. **2.** a) $\longrightarrow$ 4); b) $\longrightarrow$ 3); c) $\longrightarrow$ 2). **3.** 90°.
Evaluare (pag. 151): I. 1. A. **2.** A. **3.** F. **4.** F. **II. 1.** $\longrightarrow$ b); **2.** $\longrightarrow$ a); **3.** $\longrightarrow$ c); **4.** $\longrightarrow$ e). **III. 1.** D. **2.** B. **3.** C. **4.** A. **IV.** a) 30°; b) 130°; c) 70°.

V.3. Perpendicularitate

Autoevaluare (pag. 154): 1. a) B; b) C. **2.** a) $\longrightarrow$ 2); b) $\longrightarrow$ 4); c) $\longrightarrow$ 3). **3.** perpendiculare.
Autoevaluare (pag. 157): 1. a) B; b) C. **2.** a) $\longrightarrow$ 2); b) $\longrightarrow$ 1); c) $\longrightarrow$ 4). **3.** lungimea segmentului determinat de punctul *A* și piciorul perpendicularei din punctul *A* pe dreapta *d*.
Autoevaluare (pag. 160): 1. a) A; b) A; c) F. **2.** a) $\longrightarrow$ 3); b) $\longrightarrow$ 2); c) $\longrightarrow$ 4). **3.** Dreapta; mijlocul.
Evaluare (pag. 162): I. 1. A. **2.** A. **3.** A. **4.** A. **II. 1.** $\longrightarrow$ a); **2.** $\longrightarrow$ d); **3.** $\longrightarrow$ e); **4.** $\longrightarrow$ c). **III. 1.** C. **2.** B. **3.** C. **4.** D. **IV.** a) *BB'*; b) *C'O*; c) 1,6 cm.

V.4. Cercul

Autoevaluare (pag. 166): 1. a) C; b) D. **2.** a) $\longrightarrow$ 2); b) $\longrightarrow$ 1); c) $\longrightarrow$ 4). **3.** 3 cm.
Autoevaluare (pag. 168): 1. a) F; b) A; c) F. **2.** a) D; b) C. **3.** 25.
Autoevaluare (pag. 172): 1. a) A; b) F; c) A. **2.** a) C; b) B. **3.** secantă.
Evaluare (pag. 174): I. 1. A. **2.** F. **3.** F. **4.** A. **II. 1.** $\longrightarrow$ b); **2.** $\longrightarrow$ c); **3.** $\longrightarrow$ d); **4.** $\longrightarrow$ e). **III. 1.** D. **2.** C. **3.** B. **4.** C. **IV.** a) 60°; b) 210°; c) 150°.

CAPITOLUL VI. TRIUNGHIUL

VI.1. Triunghiul

Autoevaluare (pag. 179): 1. a) D; b) C. **2.** a) $\longrightarrow$ 2); b) $\longrightarrow$ 1); c) $\longrightarrow$ 4). **3.** *TV*.
Autoevaluare (pag. 181): 1. a) A; b) A; c) A. **2.** a) D; b) B. **3.** a) $\longrightarrow$ 4); b) $\longrightarrow$ 3); c) $\longrightarrow$ 2).
Autoevaluare (pag. 185): 1. a) A; b) C. **2.** a) $\longrightarrow$ 4); b) $\longrightarrow$ 3); c) $\longrightarrow$ 2). **3.** 6 cm.
Autoevaluare (pag. 187): 1. a) A; b) F; c) A. **2.** a) B; b) D. **3.** tangent.
Autoevaluare (pag. 190): 1. a) A; b) F; c) A. **2.** a) C; b) B. **3.** mijlocul ipotenuzei.
Autoevaluare (pag. 193): 1. a) B; b) C. **2.** a) $\longrightarrow$ 4); b) $\longrightarrow$ 3); c) $\longrightarrow$ 1). **3.** lungimea acestui segment.
Autoevaluare (pag. 196): 1. a) A; b) F; c) F. **2.** a) B; b) C. **3.** 6.
Evaluare (pag. 198): I. 1. A. **2.** A. **3.** F. **4.** F. **II. 1.** $\longrightarrow$ d); **2.** $\longrightarrow$ a); **3.** $\longrightarrow$ c); **4.** $\longrightarrow$ b). **III. 1.** B. **2.** A. **3.** D. **4.** C. **IV.** a) 70°; b) 40°; c) 60°.

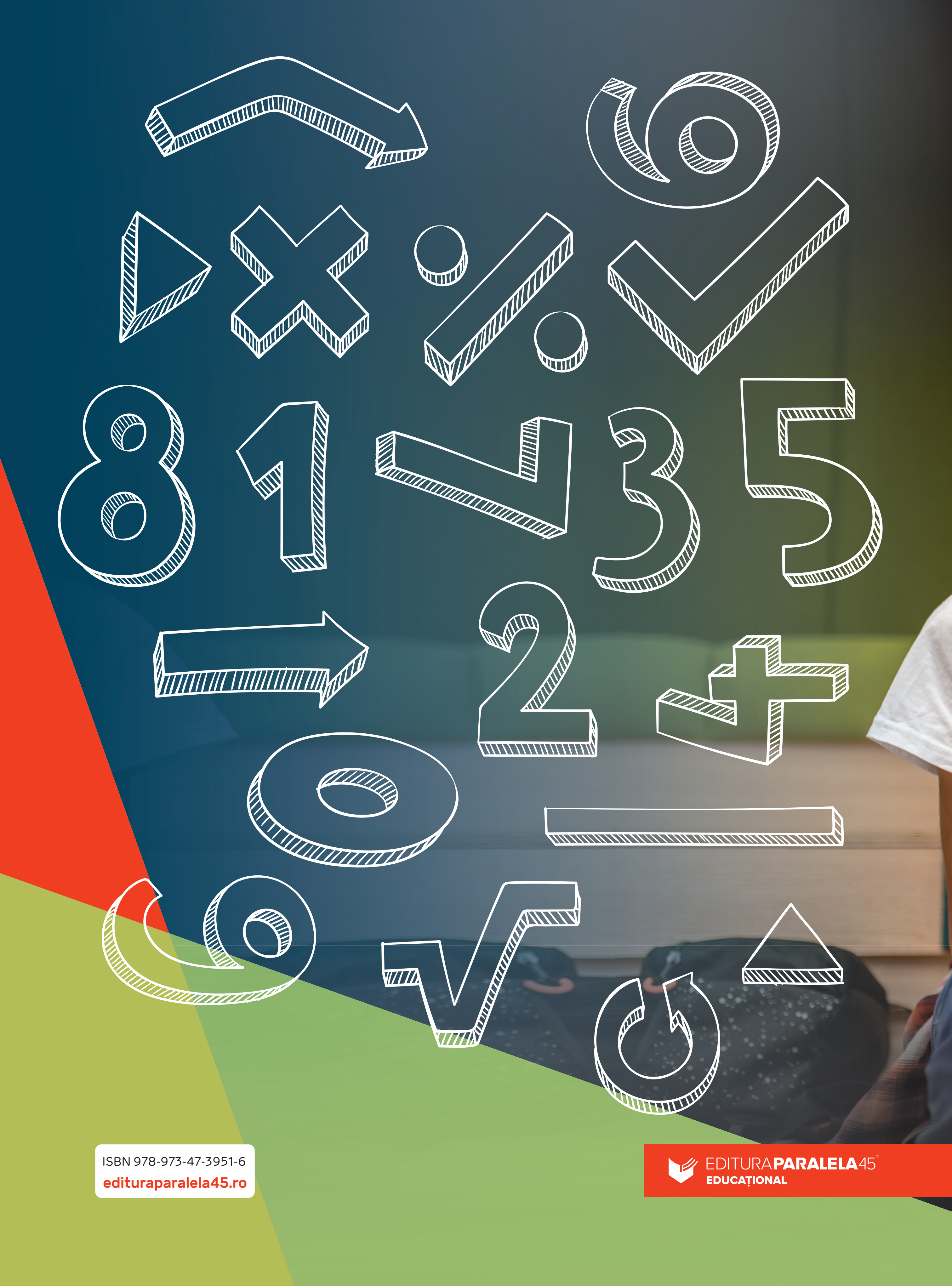
VI.2. Congruența triunghiurilor

Autoevaluare (pag. 201): 1. a) A; b) C. **2.** a) $\longrightarrow$ 3); b) $\longrightarrow$ 1); c) $\longrightarrow$ 4). **3.** 6.
Autoevaluare (pag. 204): 1. a) B; b) B. **2.** a) $\longrightarrow$ 3); b) $\longrightarrow$ 4); c) $\longrightarrow$ 2). **3.** catete; ipotenuză.
Autoevaluare (pag. 207): 1. a) F; b) A; c) A. **2.** a) $\longrightarrow$ 3); b) $\longrightarrow$ 1); c) $\longrightarrow$ 2). **3.** 90°.
Evaluare (pag. 209): I. 1. F. **2.** A. **3.** F. **4.** A. **II. 1.** $\longrightarrow$ b); **2.** $\longrightarrow$ d); **3.** $\longrightarrow$ e); **4.** $\longrightarrow$ c). **III. 1.** C. **2.** C. **3.** C. **4.** B. **IV.** a) Din LLL, $\Delta ABM \equiv \Delta ACM \Rightarrow \sphericalangle BAM \equiv \sphericalangle CAM$ (1) și $\sphericalangle ABM \equiv \sphericalangle ACM$ (2); b) Din (2), $BM = MC$ (ipoteză) și cazul IU $\Rightarrow \Delta BMP \equiv \Delta CMQ \Rightarrow MP \equiv MQ$; c) Din (1), $AM = AM$ (latură comună) și cazul IU $\Rightarrow \Delta AMP \equiv \Delta AMQ$. **V.** a) Din $\sphericalangle BDA \equiv \sphericalangle CDA \Rightarrow \sphericalangle BDA : 2 = \sphericalangle CDA : 2 \Rightarrow \sphericalangle EDA = \sphericalangle FDA$ (1) și $\sphericalangle BDE = \sphericalangle CDF$ (2). Din (1), $AD = AD$ (latură comună), $DE = DF$ (ipoteză) și cazul LUL $\Rightarrow \Delta EDA \equiv \Delta FDA$, de unde $\sphericalangle EAD \equiv \sphericalangle FAD$ și $\sphericalangle AED = \sphericalangle AFD$ (3); b) Din (3) $\Rightarrow 180° - \sphericalangle AED = 180° - \sphericalangle AFD \Rightarrow \sphericalangle BED = \sphericalangle CFD$ (4); c) Din (2), $DE = DF$ (ipoteză), (4) și cazul ULU $\Rightarrow \Delta BED \equiv \Delta CFD \Rightarrow BE \equiv CF$.

VI.3. Triunghiuri particulare

Autoevaluare (pag. 212): 1. a) D; b) D. **2.** a) $\longrightarrow$ 1); b) $\longrightarrow$ 4); c) $\longrightarrow$ 2). **3.** isoscel.
Autoevaluare (pag. 214): 1. a) F; b) A; c) A. **2.** a) C; b) C. **3.** 120°.
Autoevaluare (pag. 218): 1. a) F; b) A; c) A. **2.** a) A; b) B. **3.** 27 cm.
Evaluare (pag. 220): I. 1. A. **2.** A. **3.** A. **4.** A. **II. 1.** $\longrightarrow$ b); **2.** $\longrightarrow$ c); **3.** $\longrightarrow$ d); **4.** $\longrightarrow$ a). **III. 1.** B. **2.** C. **3.** D. **4.** A. **IV.** a) $\sphericalangle BAD \equiv \sphericalangle ACD$ (au același complement $\sphericalangle B$); b) Fie $\sphericalangle CAE = \sphericalangle DAE = x$. Avem $\sphericalangle AOF = 90° - x$ (în ΔFOA) și $\sphericalangle DOE = 90° - x$ (opuse la vârf) (1). În $\Delta ADE \Rightarrow \sphericalangle OED = 90° - x \overset{(1)}{\Rightarrow}$ $\overset{(1)}{\Rightarrow} \Delta DOE$ este isoscel cu $DE = DO$; c) Dacă $\sphericalangle C = 30° \Rightarrow \sphericalangle B = 60° \Rightarrow \sphericalangle E = 60°$ și ΔODE devine echilateral. **V.** a) 50 cm; b) 32 cm; c) 7 cm.

Test de evaluare finală 1 (pag. 221): I. 1. A. **2.** A. **3.** A. **4.** F. **II. 1)** $\longrightarrow$ e); **2)** $\longrightarrow$ a); **3)** $\longrightarrow$ d); **4)** $\longrightarrow$ c). **III. 1.** C. **2.** D. **3.** B. **4.** A. **IV.** a) $x = -1$; b) $x < -11$; c) $x \in \{-1, 0, 1, 2\}$. **V.** a) –14; b) 1; c) 9,5.
Test de evaluare finală 2 (pag. 222): I. 1. A. **2.** A. **3.** A. **4.** A. **II. 1)** $\longrightarrow$ d); **2)** $\longrightarrow$ b); **3)** $\longrightarrow$ c); **4)** $\longrightarrow$ e). **III. 1.** C. **2.** D. **3.** B. **4.** C. **IV.** a) $BC^2 = AB^2 + AC^2 = 20^2 + 15^2 = 400 + 225 = 625 = 25^2$ și $BC = 25$ cm; b) Din $BC^2 = AB^2 + AC^2 \Rightarrow 5^2 = AB^2 + 3^2 \Rightarrow 25 = AB^2 + 9 \Rightarrow AB^2 = 16 = 4^2$ și $AB = 4$ cm; c) $BC^2 = AB^2 + AC^2 \Rightarrow 13^2 = 12^2 + AC^2 \Rightarrow 169 = 144 + AC^2 \Rightarrow AC^2 = 169 - 144 = 25 = 5^2$ și $AC = 5$ cm.



ISBN 978-973-47-3951-6
edituraparalela45.ro

EDITURA PARALELA 45
EDUCAȚIONAL